

ATIVIDADES ENVOLVENDO A HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PARA ENSINAR (E APRENDER) MATEMÁTICA

Odaívo de Freitas Soares
Fernando Guedes Cury

Natal
2018

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO	2
2 HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (HEM) NA UFRN	3
3 ATIVIDADES PRODUZIDAS A PARTIR DA EMENTA DA DISCIPLINA DE HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA 2018.1 DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE (UFRN)	5
4 ATIVIDADE COMPARATIVA DE LIVROS DIDÁTICOS DO PASSADO E DO PRESENTE (SANGIORGI 1963; BIANCHINI 2015)	7
1ª PARTE: MOVIMENTOS DE MODERNIZAÇÃO DO ENSINO DE MATEMÁTICA	8
2ª PARTE: ATIVIDADE DE ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS SANGIORGI (1963) E BIANCHINI (2015)	11
5 A PROVA DOS NOVE E OS NOVES-FORA	14
PARTE 1: LEITURA E INTERPRETAÇÃO: UMA INTRODUÇÃO HISTÓRICA SOBRE A “PROVA DOS NOVE”	15
PARTE 2: IDENTIFICANDO O “NOVES-FORA” DE UM NÚMERO NATURAL OU SUA “RAIZ DIGITAL”	17
PARTE 3: RELAÇÃO ENTRE NOVES-FORA E RAIZ DIGITAL	18
PARTE 4: PROVA DOS NOVE PARA A OPERAÇÃO DE ADIÇÃO	20
PARTE 5: PROVA DOS NOVE PARA A OPERAÇÃO DE SUBTRAÇÃO	23
PARTE 6: PROVA DOS NOVE PARA A OPERAÇÃO DE MULTIPLICAÇÃO	25
PARTE 7: PROVA DOS NOVE PARA A OPERAÇÃO DE DIVISÃO	27
PARTE 8: REFLEXÃO FINAL	29
5 CONCLUSÃO	30
6 REFERÊNCIAS	31
7 ANEXOS.....	32

1 APRESENTAÇÃO

Neste caderno de atividades, preparamos duas sequências didáticas, sendo a primeira com os conteúdos do **Mínimo Múltiplo Comum (MMC)** e **Máximo Divisor Comum (MDC)**, a segunda é a prova dos nove. Todas direcionadas aos alunos de graduação em Matemática e professores da educação básica.

Temos um contexto histórico geral e os conteúdos que focaliza suas bases estruturais nos livros do **Movimento da Matemática Moderna (MMM)** em comparação com os livros atuais, na busca por uma compreensão dos por quês das ausências e permanências dos conteúdos nos livros em determinados períodos. Temos também a prova dos nove ainda muito falada pelas pessoas das décadas: 1960 e 1970.

As atividades são relacionadas ao estudo da História da Educação Matemática (HEM), a Matemática e sua aprendizagem, onde procuramos analisar qual potencial da HEM na sala de aula e se pode ser utilizada como recurso pedagógico.

Atualmente, fazemos parte do Grupo Potiguar de Estudos e Pesquisas em História da Educação Matemática da UFRN (GPEP), que está conectado a base de pesquisa da HEM.

Este grupo tem se revelado autônomo e já é uma referência nacional nos estudos relacionados à HEM, e nas relações dessas com o contexto escolar, estrutura curricular, todas ligadas ao ensino da Matemática.

O estudo nosso nessa área inicia no grupo do GPEP e se consolida na produção das duas atividades, contidas na dissertação que defenderemos intitulada de “Atividades baseadas em História da Educação Matemática para a formação de professores”, a qual será apresentada como nosso produto educacional, que poderá auxiliar o professor na sala de aula.

A primeira atividade (*Atividade comparativa de livros didáticos do passado e do presente*) é composta por uma parte introdutória na 1ª parte, onde apresentamos uma breve visão do Movimento da Matemática Moderna (MMM) e uma 2ª parte (Atividade de análise de livros didáticos sangiorgi (1963) e Bianchini (2015)), onde os questionamentos deverão conduzir os alunos a notificar as principais diferenças no contexto, diagramação, técnicas/modos de resolução, demonstrações. Buscando perceber as alterações e permanências dos conteúdos nos dois períodos. Para isso, vão escrevendo e dando exemplos no material, para no final fazer suas conclusões.

A segunda atividade (*A prova dos nove e os nove-fora*) também é composta por uma parte introdutória que busca apresentar uma pequena introdução histórica sobre a prova dos

nove, onde o aluno/professor vão buscar situa-se no tempo, buscando identificar os aspectos positivos e se possível negativo, de um estilo de prova que foi muito utilizada durante séculos e até hoje por alguns comerciantes. A partir da segunda parte, inicia o processo de aprendizagem do mecanismo de resolução algébrica de aprendizagem do mecanismo de resolução e aplicação nas operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.

Na conclusão, apontaremos os resultados favoráveis do trabalho com a HEM, sua relação com os conteúdos trabalhados pelo professor em sala de aula. Também apresentaremos as dificuldades de ordem estrutural, uma vez que estudamos vários materiais bibliográficos para montar o nosso, e discutiremos com o grupo o material final.

2 HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (HEM) NA UFRN



A disciplina História da Educação no Brasil republicano, passou por três grandes momentos de construção de uma identidade por meio da intervenção do professor: Aquele preocupado com a construção de uma identidade nacional e que toma a história como fonte de formação e de conteúdos para projetar sobre eles um futuro; um outro mais atento para o ensino de capacidades cognitivas do que de conteúdo, com vistas a atuação num contexto em mudança e ainda um movimento que se volta para a construção da subjetividade, para que quem aprenda história da educação ressignifique a sua vida e se torne, na medida do possível, mais consciente das suas escolhas. Esse terceiro movimento exige uma interação não linear entre professor, aluno e conhecimento (NUNES, 2006, p. 177).

Uma das maiores dificuldades apontadas para a inserção da História da Educação em sala de aula, deve-se ao fato da forma como se deu a formação dos professores nas faculdades de filosofia da década de 1970, pois no início, a metodologia restringia-se à reprodução dos fatos. O espaço foi aberto para ser discutido, quando nos cursos de pós-graduação na mesma época, foi criada uma nova concepção chamada de nova história. Mas, somente, alguns anos depois que foi institucionalizado o Ensino de História da Educação nas ementas das universidades, pois segundo Nunes (2006), “Foi no início dos anos 1990 que nós historiadores da educação começamos a trilhar nosso percurso, pela nossa prática e pelo nosso projeto de pesquisa, sendo visto, às vezes, como intruso e outras vezes como parceiros na produção do conhecimento”.

A disciplina História da Educação Matemática (HEM) passou a fazer parte da estrutura curricular da Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte/Brasil a partir do ano de 2002, por meio de aprovação do Projeto Político Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática (PPPCLM), por meio da Resolução nº 058/2002/CONSEPE (Conselho de Ensino pesquisa e Extensão) aprovada em 20 de agosto de 2002, com o código MAT359, tendo carga horária de 90 horas, 6 créditos e ofertado no terceiro período do curso. Ela foi uma das que influenciou a reelaboração do Projeto Pedagógico do Curso, sugerindo que as diretrizes curriculares voltadas à formação de professores do ensino básico deveriam valorizar conhecimentos de História da Ciência e de seu ensino, percebendo seu papel articulador entre as outras disciplinas do curso (ALVES e GUTIERRE, 2016).

Assim, algumas atividades/ações foram aplicadas/desenvolvidas, desde 2009, em turmas da graduação em Matemática com o objetivo de aproximar os dois lados, o científico e o pedagógico da HEM, mostrando como, na UFRN a HEM vem sendo compreendida tanto como disciplina, quanto campo de investigação.

Duas ações são específicas de acordo com a ementa da disciplina de HEM na UFRN: a primeira é o trabalho com o livro do Sangiorgi e um atual, onde é feito uma análise do conteúdo de MDC (máximo divisor comum) e MMC (mínimo múltiplo comum), buscando fazer uma análise da forma de trabalho com as estruturas metodológicas da matemática; a segunda é o trabalho com a prova dos nove-foras, muito usado até hoje no comércio pelas pessoas mais antigas, mas que hoje não aparece nos livros didáticos devido a um erro que aparece, mostrando que se a prova estiver errada é porque tem realmente um erro, mas se estiver correta ela pode apresentar um erro.

Aqui, apresentamos duas propostas pedagógica, com as respectivas, primeira e segunda ações, para que o professor reflita que para entender o presente de forma inteligível, é preciso compreender o passado.

3 ATIVIDADES PRODUZIDAS A PARTIR DA EMENTA DA DISCIPLINA DE HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA 2018.1 DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE (UFRN)

O processo de elaboração teve como base alguns aspectos da metodologia da pesquisa-ação, que tem Michel Thiollant (2011) aqui no Brasil como um dos principais estudiosos. O enfoque está no trabalho em grupo, onde primeiro os membros, tem uma participação individual nas leituras sobre o tema e depois são conduzidos ao debate central, onde a partilha das informações/compreensões deve ser articulada em prol de um conhecimento que se generaliza no grupo. Tal esquema foi articulado pelo professor da disciplina e o pesquisador, com o objetivo de apresentar dois exemplos práticos do estudo de conteúdos no ensino de HEM.

A análise desse material procurará, por sua vez, responder a seguinte questão: *como atividades/ações didáticas pautadas na História da Educação Matemática podem contribuir para a formação inicial ou continuada de professores e na sua visão sobre o ensino de matemática?*

Para responder a esta questão, estipulamos um objetivo geral que pode ser assim descrito: elaborar um caderno com atividades pautadas na História da Educação Matemática, que permitam o (futuro) professor de matemática ser capaz de compreender o conteúdo presente nos livros didáticos, a partir das relações com as fontes que o passado nos oferece, formalizando assim, sua aplicação sistematizada e a relação com o meio, percebendo assim, as influências dos contextos sócio-político nacionais/locais no qual o ensino de matemática está ou esteve inserido, as demandas colocadas pelas realidades sociais em cada tempo e as concepções e finalidades da educação matemática em diferentes momentos.

E, além desse objetivo geral, nossos objetivos específicos são assim apontados:

- Aplicar a atividade de comparação de livros didáticos, proporcionando o manuseio do livro do Sangiorgi de 1963, período do Movimento da Matemática Moderna (MMM);
- Conhecer e compreender o processo de verificação da prova dos nove, por meio de exercícios e demonstrações, assim como deduzir o que levou a sua retirada dos livros didáticos atuais;
- Avaliar a atividade por meio de sua aplicação e compreensão dos relatos oral e escrito dos alunos, relativo a análise de livros didáticos e a prova dos nove, de acordo com os temas abordados.

A primeira atividade, foi trabalhar com os conteúdos de MDC e MMC, onde fomos folhear os livros do Sangiorgi (1963) do período do MMM e do Bianchini (2015) atual, fazendo primeiro uma leitura de um texto sobre o período do MMM. Na segunda parte, buscava observar e relatar as diferenças nos dois livros de Matemática, escritos em dois momentos diferentes, em relação aos questionamentos para poder compreender a importância da relação passado e presente.

A segunda atividade, fomos tentar compreender porque a prova dos nove não é mais usada nos livros didáticos, mas ainda resiste nas pessoas que estudaram nas décadas de 1960 e 1970, em suas residências e até no comércio. Para isso, devemos seguir a atividade por partes, iniciando com um pequeno texto, depois buscando compreender os nove-foras, a raiz digital, para depois saber aplicar o processo de tirar a prova dos nove nas operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, comprovado por suas respectivas demonstrações.

4 ATIVIDADE COMPARATIVA DE LIVROS DIDÁTICOS DO PASSADO E DO PRESENTE (SANGIORGI 1963; BIANCHINI 2015)

A atividade está dividida em dois momentos, o primeiro é uma pequena contextualização do Movimento da Matemática Moderna (MMM), para que se possa compreender que alguns modos/técnicas eram peculiares daquele período. E um segundo momento, onde o grupo (professor/aluno) deve trabalhar com os livros didáticos acima citados (ver anexos) e buscar identificar as especificidades que ora os questionamentos retomam.

Agora, leiam com atenção, as sugestões para aplicação em sala de aula:

1ª) Enviar um artigo para leitura sobre a temática (mínimo de 8 dias)

2ª) Fazer a leitura do texto da 1ª parte, fazendo a discussão (tendo como base o(s) texto(s) lidos no item 1), e o conhecimento cultural sobre a temática.

3ª) Todas as perguntas abaixo, feitas na 2ª parte, serão respondidas após o aluno (grupo) concluir a leitura do material referente aos livros didáticos que deverá entregar em forma de xerox individual (ver anexos).

4ª) A sugestão é que o tempo de aplicação seja de 4 horas/aula, sendo 1 h/a para a leitura e discussão da 1ª parte, 1h/a para leitura do material e 2 h/a para buscar compreender e responder os questionamentos abaixo.

5ª) Antes de responder cada questão, converse com a turma, às vezes ficam confusos. EX: Na primeira pergunta diz: onde os conteúdos estão alocados (você localiza facilmente observando o sumário).

6ª) As demais questões falam em estratégias, conceito, modos, técnicas, características e propriedades (estes conceitos poderão ser reforçados antes do início da atividade)

7ª) Ao final da atividade conduza os alunos ao debate final (um dos aspectos da metodologia da Pesquisa-ação), explorando uma conclusão final (individual) sobre o que acharam do trabalho com a análise de livros, enfocando quais as vantagens para o professor conhecer as alterações e permanências nos conteúdos em diferentes períodos (pode ser gravado ou escrito no próprio material).

8ª) A avaliação deverá ser feita de forma qualitativa, observando o cumprimento das tarefas:

- a) Leitura do material sugerido para casa (item 1)
- b) Na sala de aula, tenha participado efetivamente (item 2, 5 e 7)
- c) Gravação da aula em áudio

Inicialmente, para este momento, o aluno deverá ter lido o artigo sobre o Movimento da Matemática Moderna (MMM) sugerido para casa, mais este texto que será lido por todos, sendo um pequeno resumo, para que alguns aspectos daquele período possam ser compreendidos.

1ª PARTE MOVIMENTOS DE MODERNIZAÇÃO DO ENSINO DE MATEMÁTICA

No início do século XX, por causa do descompasso existente entre as matemáticas ensinadas nas escolas e nas universidades, propostas foram sinalizadas em nível mundial para buscar melhorias no ensino desta disciplina. Este movimento, indicado pela literatura como o 1º Movimento Internacional para a Modernização da Matemática, cujo expoente máximo talvez tenha sido o alemão Felix Klein, teve como principais propostas de mudanças para o ensino secundário: (a) uma atualização da matemática da escola secundária, aproximando-a de avanços científicos obtidos nos séculos anteriores e do desenvolvimento moderno dessa área; (b) considerar os últimos resultados dos trabalhos de psicologia no desenvolvimento das aulas de matemática, valorizando o interesse do aluno, a aplicação dos conceitos e um ensino gradual no qual o professor deveria partir do intuitivo para o abstrato; (c) utilização do conceito de função como eixo do ensino pela sua importância nas outras ciências e familiarização com os métodos gráficos de representação; (d) introdução do Cálculo Diferencial e Integral.

Para a formação dos futuros professores de matemática, os defensores de mudanças indicavam que as universidades deveriam modificar as suas propostas de ensino, levando em consideração as necessidades do futuro mestre, evidenciando as relações existentes entre as diferentes áreas da matemática e entre ela e as outras áreas do conhecimento, além de destacar a relação entre os conteúdos estudados e o seu ensino das escolas.

No Brasil, as ideias modernizadoras foram abraçadas por Euclides Roxo, que foi professor e diretor do Colégio Pedro II, no Rio de Janeiro. A partir da década de 1920 ele promoveu mudanças nos programas e currículos daquela escola e propunha que a metodologia dos professores também deveria mudar com aulas que dessem ênfase na descoberta, aplicações e resolução de problemas. Ele defendeu a unificação das Matemáticas – que antes eram ensinadas separadamente de acordo com seus ramos: Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria – numa mesma disciplina. Essas propostas foram muito relevantes e tiveram efeito direto na Reforma educacional de Francisco Campos, em 1931.

Os contrários às propostas modernizadoras diziam que os professores não se sentiam preparados para trabalhar com uma “nova matemática” e defendiam aquela mais clássica (pautada nos Elementos de Euclides). Havia ainda críticas ao excesso de conteúdo, principalmente por parte dos defensores do ensino das “humanidades” (Gramática, Latim, Grego, Filosofia e retórica) e a alegação de inexistência de livros didáticos adequados àquelas ideias.

Em meados do século XX, especialmente nas décadas de 1950 a 1970, outro movimento, o Movimento da Matemática Moderna (MMM), tentou também redirecionar o ensino de Matemática pelo mundo. A preocupação em modernizar o ensino de matemática assentasse na persistente disparidade entre os ensinamentos dos níveis médio e superior. Entretanto, para além do campo pedagógico ou científico-tecnológico, outras motivações de cunho político-econômico tiveram vez: durante a II Guerra Mundial, os americanos perceberam que seus soldados apresentavam alto grau de deficiência em Matemática. No pós-guerra, durante o período da Guerra Fria, o lançamento do foguete Sputnik pelos soviéticos revelou também uma desvantagem tecnológica dos Estados Unidos, obrigando-os a repensar o ensino de Matemática e de ciências na escola média. Além disso, em 1959 a Organização Europeia de Cooperação Econômica preocupada com uma melhor formação do seu pessoal técnico-científico organizou uma conferência mundial em que especialistas discutiram propostas de mudanças para o ensino de matemática em nível médio, muito influenciadas pela matemática estruturada pelo Grupo Bourbaki – grupo de matemáticos, na maioria franceses, que escreveu um tratado de Análise e acabou por reorganizar boa parte da Matemática desenvolvida até a primeira metade do século XX, tomando como princípios a unidade da Matemática, as estruturas-mães (algébricas, topológicas e de ordem) e o método axiomático.

As principais características do ensino básico de matemática indicadas pelo MMM eram: (a) o elevado grau de generalidade, abstração e rigor lógico; (b) a ênfase nas estruturas e na axiomatização com conseqüente distanciamento da matemática de problemas práticos; (c) uso da Teoria dos Conjuntos como elemento responsável pela unificação dos conteúdos por sua precisão e linguagem universal.

Nesse momento foi criado no Brasil o Grupo de Estudo do Ensino de Matemática (GEEM) em novembro de 1961, com sede na Universidade de Mackenzie em São Paulo, formado por vários professores – entre eles Osvaldo Sangiorgi – com a intenção de disseminar o MMM entre os educadores de todos os níveis. O GEEM teve o apoio do governo de São Paulo para desenvolver seu trabalho na rede estadual de ensino ministrando cursos para professores sobre quais conteúdos deveriam ser ensinados e como isso deveria ser feito.

Sangiorgi também publicou livros que se tornaram referência para o ensino secundário no Brasil. Destaque para com a obra “Matemática Moderna para o Ensino Secundário” de 1962.

O MMM foi se espalhando pelo Brasil através de outros grupos formados por professores das grandes universidades do país. Mas as consequências que essa nova mudança trouxe na prática escolar – em nível mundial – foram a desvalorização do ensino de geometria euclidiana, mudança nos conteúdos escolares, supervalorização dos livros didáticos, agravamento das dificuldades dos alunos pelo excesso de abstração necessário para a condução das aulas usando as diretrizes do movimento.

Já nos anos 1970 muitas reações surgiram contra o MMM, indicando que a Matemática é uma linguagem que permite compreender melhor os fenômenos que estão à nossa volta e seu ensino deve valorizar as diferentes formas de representação dos elementos matemáticos; considerar os conhecimentos prévios dos estudantes e detectar seus interesses e suas “realidades”; destaque para o tratamento de informações e para se ensinar a resolver problemas e usar as tecnologias e materiais concretos antes de ascender a raciocínios mais abstratos.

2ª PARTE: ATIVIDADE DE ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS SANGIORGI (1963) E BIANCHINI (2015)

Para o segundo momento, para cada pergunta há dois quadros que você deverá responder, o da esquerda é sua análise em relação ao livro do Bianchini e o da direita em relação ao livro do Sangiorgi.

Matemática Bianchini – 6º ano (Bianchini 2015)	Matemática – Curso Moderno (Sangiorgi, 1966)
2.1. Em relação à distribuição geral dos conteúdos no livro, onde se encontram alocados os tópicos ligados ao “Máximo Divisor Comum” e ao “Mínimo Múltiplo Comum”.	
2.2. Quais estratégias os autores usam para introduzir os tópicos de MMC e MDC?	
2.3. Qual é o conceito de MDC apresentado? Se está apoiado em outros conceitos, quais são?	
2.4. Qual é o conceito de MMC apresentado? Se está apoiado em outros conceitos, quais são?	

2.5. Que modos/técnicas são indicados para o cálculo do MDC?

2.6. Que modos/técnicas são indicados para o cálculo do MMC?

2.7. Que outros conceitos relacionados com os conteúdos de MMC e MDC são apresentados nas seções que tratam desses temas?

2.8. Quais características ou propriedades do MDC e do MMC são apresentadas? Como elas são apresentadas aos alunos?

2.9. De que tipo são os exercícios apresentados nessas seções dos livros (exercícios de aplicação, problemas, desafios)? Dê exemplos.	
2.10. Como são apresentados os elementos gráficos e a diagramação dos livros? Textos, tabelas, figuras etc são, em sua opinião, relevantes para que cada autor apresente seu conteúdo nesses dois livros?	
2.11. Mesmo a partir de uma análise preliminar e pontual é possível perceber elementos característicos dos momentos do ensino de matemática de cada um dos dois livros (MMM e período atual). Reveja o texto que introduz essa atividade e descreva esses elementos com exemplos retirados dessas duas obras.	

5 A PROVA DOS NOVE E OS NOVES-FORA

A atividade está estruturada em dois momentos, onde o primeiro é o debate do contexto histórico- cultural da aplicação da prova dos nove. No segundo, segue um passo a passo, onde professor e aluno vão dialogando com exemplos, demonstrações e problemas, buscando compreensões da forma como se fazia a prova dos nove nas operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Também deverá se focar nos possíveis conteúdos que estão intrínsecos ao seu contexto. Por fim, testa-se sua eficácia ou não, para compreender sua provável saída dos livros didáticos,.

Agora, leiam com atenção, sugestões para aplicação em sala de aula:

1ª) Enviar um artigo para leitura sobre a temática (mínimo de 8 dias)

2ª) Fazer a leitura do texto da 1ª parte, fazendo a discussão (tendo como base o(s) texto(s) lidos no item 1), e claro, os conhecimentos culturais sobre a temática. Depois debate sobre o refletindo sobre o texto.

3ª) Todas as perguntas abaixo, feitas na 2ª parte, serão respondidas de forma sequencial com professor/aluno, fazendo as devidas discussões, demonstrações, aplicações que o material proporciona, assim como sugestões de outras formas de resolução, de acordo com o conhecimento do grupo.

4ª) A sugestão é que o tempo de aplicação seja de 4 horas/aula, sendo 1 h/a para a leitura e compreensão da parte do contexto histórico do material (1ª parte) e 3 h/a para responder da 2ª a 8ª parte do material.

5ª) As questões falam em estratégias, conceito, modos, técnicas, características e propriedades (estes conceitos poderão ser reforçados antes do início da atividade)

6ª) Ao final da atividade conduza os alunos ao debate final (um dos aspectos da metodologia da Pesquisa-ação), explorando uma conclusão final (individual) sobre o que acharam do trabalho com a prova dos nove, enfocando quais as vantagens para o professor conhecer as alterações e permanências nos conteúdos em diferentes períodos (pode ser gravado ou escrito no próprio material).

7ª) A avaliação deverá ser feita de forma qualitativa, observando o cumprimento das tarefas:

- a) Leitura do material sugerido para casa (item 1)
- b) Na sala de aula, tenha participado efetivamente (item 2, 3, 5 e 6)
- c) Gravação das falas em áudio

Inicialmente, para este momento, deve ter sido lido o artigo sobre a prova dos nove sugerido para casa, o qual representa um pequeno resumo histórico-cultural, para que alguns aspectos daquele período possam ser compreendidos.

PARTE 1: LEITURA E INTERPRETAÇÃO: UMA INTRODUÇÃO HISTÓRICA SOBRE A “PROVA DOS NOVE”

Fazer contas faz parte do contexto cultural da humanidade. E para verificar se essas contas estão corretas ou não o homem inventou ferramentas práticas como “a prova dos nove”, muito utilizada durante séculos e até hoje por alguns comerciantes.

Você já ouviu falar em prova dos nove? Os comerciantes mais antigos das décadas de 1950 e 1960 são familiarizados com essa prática cuja essência centra-se na retirada do maior número de múltiplos de nove existente em um número inteiro.

O procedimento para a verificação pela prova dos nove deve iniciar por “tira os noves-fora” de um número. Isso significa encontrar o resto da divisão de um número por 9, ou seja, é retirado o maior número de múltiplos de 9 de um número dado. Já a prova dos nove de fato (usada para verificar se uma conta está correta) parte dos “noves-fora” e possui estratégias diferentes de acordo com a operação: adição, subtração multiplicação ou divisão.

Não existe uma certeza sobre como se começou a utilizar a prova dos nove. Há um indício de ela ter surgido nos estudos do teólogo Hipólito que foi bispo do Porto de Roma, na Itália, no século III de nossa era.

Mesmo sendo vista de diferentes maneiras por alguns autores, como uma **regra** que permite saber se uma operação matemática foi realizada de forma correta, uma **técnica** para verificar os resultados das operações aritméticas ou um **método** para identificar erros nas operações com números naturais, acreditamos que está pode ser considerada uma **prática sociocultural** de verificação da correção de um cálculo escrito, e não como um conteúdo escolar autônomo, uma vez que o seu uso era mais evidenciado nas atividades comerciais.

Seu aparecimento nas obras em Língua Portuguesa deu-se, pela primeira vez, na obra "Tratado de pratica d' Arismetyca", no ano de 1519, escrita por Gaspar Nicolas, publicado em Lisboa, Portugal. Esse livro era destinado a um público adulto, utilizado principalmente no comércio pelos mercadores.

O estudo da prova dos nove em livros didáticos feito por Lacava (2017), compreendendo a época de implementação dos grupos escolares no Brasil, especialmente entre 1890 e 1970, mostra que esse assunto estava inserido, na maioria das vezes, no capítulo das operações fundamentais ou associado a divisibilidade e em alguns casos estava ilustrado nas tabuadas. Mas seu uso não está ligado apenas ao cálculo com operações matemáticas básicas: divisibilidade, decomposição e indução são também exemplos temas ligados ao método.

No início do século XX, por exemplo, a prova dos nove era cobrada nos exames de admissão para o ingresso em escolas do ensino secundário como o Famoso Colégio Pedro II do Rio de Janeiro.

O processo de se encontrar, ou de tirar o nove-fora de um número dá um resultado igual ao cálculo da chamada **raiz digital** de um número. A prova dos nove, baseada no tirar os nove-fora de um número, como veremos mais adiante, se justifica, porque nosso sistema numérico é decimal. Portanto, se o nosso sistema numérico fosse, por exemplo, vigesimal (com base vinte), teríamos uma prova dos dezanove.

Hoje os livros didáticos não trazem mais a prova dos nove. Provavelmente em virtude de falhas na não confirmação do erro de uma operação: se uma operação for feita corretamente, a prova dos nove confirmará isso, mas se a operação estiver errada, a prova dos nove pode não indicar o erro. Entretanto, mesmo que a prova dos nove pode ser realizada por uma decomposição de um número em múltiplos de 9, pode ser proveitoso discuti-la em sala de aula para permitir que o aluno, por exemplo, crie estratégias de decomposição.

Refletindo sobre o texto

a) Você já tinha ouvido falar sobre “prova dos nove” e “tirar o nove-fora” de um número? Se sim, explique de onde conhece e se sabe fazer.

b) Cada ser humano vive no contexto de um grupo, é parte de uma sociedade específica, marcada por uma cultura. Cada cultura tem suas próprias regras, ou seja, os comportamentos comuns que têm um significado particular de que a cultura, mas não têm valor em outro grupo cultural. Desta forma, podemos falar de práticas sociais, para se referir a este tipo de comportamentos que são socialmente aceitos por um grupo de indivíduos. **Comente a afirmação: “a prova dos nove pode ser considerada uma prática social/cultural”.**

PARTE 2: IDENTIFICANDO O “NOVES-FORA” DE UM NÚMERO NATURAL OU SUA “RAIZ DIGITAL”

Como se faz para determinar o nove-fora do número 48?

1ª maneira: Dividindo 48 por 9. Tem-se: $48 \div 9 = 5$ e *tem resto 3*, pois $5 \times 9 + 3 = 48$. Portanto o nove-fora de 48 é 3.

2ª maneira: Temos que o maior múltiplo de 9 que é menor que 48 é $5 \times 9 = 45$, logo temos que $48 - 45 = 3$. Portanto, o nove-fora é 3.

Portanto, se **a** é um número natural qualquer, “tirar o nove-fora” de **a** é encontrar o resto da divisão de **a** por 9. Este valor pode também ser encontrado subtraindo de **a** o maior múltiplo de 9 que seja menor ou igual a **a**.

Exercício 1: Utilizando os dois processos acima, defina o nove-fora dos números:

- a) 17
- b) 75
- c) 368
- d) 1.456

Exercício 2: Raiz digital de um número

Retome o exercício 1 e some os algarismos que compõem o numeral em cada item. Se o resultado for maior que nove, some novamente os algarismos desse resultado. Refaça isso até que o resultado final seja menor ou igual a nove. Exemplo: para o número 588 faríamos $5 + 8 + 8 = 21$, depois $2 + 1 = 3$. Esse procedimento chama-se encontrar a **raiz digital** de um número. Então, 3 é a raiz digital de 588.

Refletindo: Depois que você encontrar a raiz digital dos números indicados nos itens do Exercício 1 compare os resultados com os restos das divisões daqueles números por nove. Qual sua conclusão?

PARTE 3: RELAÇÃO ENTRE NOVES-FORA E RAIZ DIGITAL

Demonstração 1: Vamos verificar que a identificação do noves-fora de um número pode ser feito de maneira mais prática calculando a raiz digital desse número. Para isso deveremos mostrar, inicialmente, o seguinte resultado: Para todo número natural i , teremos que $10^i - 1$ é múltiplo de 9.

1º) Para $i = 1$, temos como base:

$$10^1 - 1 = 10^1 - 1 = 10 - 1 = 9. \text{ Logo, } 9 \text{ é múltiplo de } 9.$$

2º) Para $i = k$, temos:

$$10^i - 1 = 10^k - 1. \text{ Logo, esta é nossa hipótese de indução.}$$

3º) Para $i = k + 1$, temos:

$$10^i - 1 = 10^{k+1} - 1 = 10^k \cdot 10 - 1 = 10^k(9 + 1) - 1 = 9 \cdot 10^k + 10^k - 1$$

Portanto, como $9 \cdot 10^k$ é múltiplo de 9 e $10^k - 1$ também (pela hipótese de indução), então a soma $9 \cdot 10^k + 10^k - 1$ é múltiplo de 9.

Segunda etapa: mostraremos que a soma dos algarismos de um número a e o próprio a tem o mesmo resto quando divididos por 9.

Vamos considerar a representação decimal do número natural a por $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$, em que para todo número natural i , $0 \leq i \leq n$, a_i é um algarismo do nosso sistema de numeração.

Portanto, podemos expressar a decomposição decimal de a da seguinte forma:

$$a = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + 10 a_1 + a_0$$

Sejam a e a' dois números naturais, sendo $a' = (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0)$ tais que $a = 9q + r$ e $a' = 9q' + r'$, em que q, q', r e r' são números naturais e $0 \leq r < 9$, e $0 \leq r' < 9$ (Algoritmo da divisão). Observemos que r e r' são os restos das divisões de a e a' por 9, respectivamente.

Como $a = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + 10 a_1 + a_0$, então:

$$a = [(10^n - 1 + 1)a_n + (10^{n-1} - 1 + 1)a_{n-1} + \dots + (10 - 1 + 1)a_1 + a_0],$$

logo,

$$a = [(10^n - 1)a_n + a_n + (10^{n-1} - 1)a_{n-1} + a_{n-1} + \dots + (10 - 1)a_1 + a_1 + a_0]$$

$$a = [(10^n - 1)a_n + (10^{n-1} - 1)a_{n-1} + \dots + (10 - 1)a_1 + a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0]$$

Tomemos agora o número natural $b = (10^n - 1)a_n + (10^{n-1} - 1)a_{n-1} + \dots + (10 - 1)a_1$. Observe que b é um múltiplo de 9, pois consiste na soma de múltiplos de 9. Assim, $a = b + a'$, mas como $a = 9q + r$ e $a' = 9q' + r'$ (definidos anteriormente), podemos escrever $(9q + r) = b + (9q' + r')$. Como b é um múltiplo de 9, podemos escrever $b = 9q''$, com $q'' \in \mathbb{N}$. Desse modo, teremos $(9q + r) = 9q'' + (9q' + r')$. Então:

$$(9q + r) = 9q'' + (9q' + r') = 9(q'' + q') + r',$$

Logo:

$$9q + r = 9(q'' + q') + r'$$

Como $9q$ e $9(q'' + q')$ são múltiplos de 9, podemos afirmar que $r = r'$, pois r e r' são menores que 9.

Então a e $(a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0)$ deixam o mesmo resto quando divididos por 9.

Portanto, podemos garantir que os restos das divisões de um número natural e da soma dos seus algarismos por 9 são iguais, assim, acabamos de demonstrar a regra prática dos nove-foras.

PARTE 4: PROVA DOS NOVE PARA A OPERAÇÃO DE ADIÇÃO

Ao usar a prova dos nove para confirmar se uma operação de adição está correta devemos proceder assim: tiramos os noves-foras de cada parcela, depois somamos esses dois valores e tiramos o seu noves-fora. Em seguida tira-se o noves-fora da soma (resultado da operação que se quer conferir). Para a operação estar correta, segundo a prova dos nove, **o valor dos noves-fora da soma dos noves-fora das parcelas deve ser igual ao noves-fora do resultado da operação** (soma ou total). Podemos usar um quadro para melhor compreender esse procedimento. A operação estaria correta quando os valores preenchidos na segunda coluna forem iguais.

Noves-fora...	
<i>da parcela 1</i>	<i>da soma dos noves-fora das parcelas</i>
<i>da parcela 2</i>	<i>da soma ou total</i>

Exemplos: Analise a operação e complete o quadro ao lado

Operação

Tabela dos noves-fora

245

+467

712

Operação

Tabela dos noves-fora

5.847

3.754

+2.862

12.463

Exercício 3: Qual o total de gols marcados por três equipes que participam de um campeonato estadual, sabendo que o Baraunense marcou 15 gols no 1º turno e 14 gols no 2º turno, o Potiguaense marcou 14 gols no 1º turno e 11 no 2º turno e por último, o mossoroense marcou 12 gols no 1º turno e 13 no 2º turno. Resolva a efetuando a soma e conferindo o resultado pela prova dos nove.

Demonstração 2: A prova dos nove, vale para qualquer adição de números naturais?

Vamos considerar **a, b, c e d** quatro números naturais tais que

$$a = 9q_1 + r_1, b = 9q_2 + r_2, c = 9q_3 + r_3 \text{ e } d = 9q_4 + r_4,$$

Em que q_1, q_2, q_3, q_4 são respectivamente os quocientes da divisão de a, b, c, d por 9 e os números naturais $r_1, r_2, r_3, r_4 < 9$, são respectivamente os nove foras de a, b, c, d.

Agora, vamos fazer a verificação da **adição** por meio da prova dos nove: precisamos tirar os nove-fora das parcelas, logo depois, verificar se é igual ao nove-fora do total. Outra opção, é tirar os nove-fora de cada parcela, logo depois somar os resultados e tirar novamente os nove-fora depois verificar se é igual ao nove-fora do total.

Aplicação: Adição de duas parcelas (substitua de acordo com as hipóteses definidas)

Supondo-se: $a + b = c$

$$\text{Temos: } 9q_1 + r_1 + 9q_2 + r_2 = 9q_3 + r_3$$

$$\text{Logo: } 9(q_1 + q_2) + r_1 + r_2 = 9q_3 + r_3,$$

Como: $9(q_1 + q_2)$ e $9q_3$ são múltiplos de 9 e $r_1 + r_2$ e r_3 são os restos,

Conclui-se que: $r_1 + r_2$ (parcelas) = r_3 (soma ou total).

Se tivermos $r_1 + r_2 \geq 9$, fazemos $r_1 + r_2 = 5 + r_5$ e teríamos $9(q_1 + q_2 + 1) + r_5 = 9q_3 + r_3$.

De todo modo, o nove-fora da soma da soma dos nove foras das parcelas, será igual ao nove-fora do resultado. E, a segunda coluna do quadro abaixo será formada por valores iguais:

Parcela 1	r_1	$r_1 + r_2$	Soma das parcelas
Parcela 2	r_2	r_3	Soma ou total

Conclusão: Quando retirado de cada parcela e da soma todos os múltiplos de 9, sobram para cada um deles, um resto, que é aqui chamado de noves-fora. Então, o noves-fora da soma dos restos das parcelas da adição inicial deve ser igual ao noves-fora da soma. Dessa forma, verificamos que a prova dos nove da adição é válida para qualquer caso.

PARTE 5: PROVA DOS NOVE PARA A OPERAÇÃO DE SUBTRAÇÃO

Para confirmar se uma subtração está correta pela prova dos nove tiramos o noves-fora do minuendo, depois, do subtraendo e, em seguida, da diferença. Então, calcula-se o noves-fora da soma desses dois últimos. A operação de subtração analisada estará correta, segundo a prova dos nove, quando os noves-fora da soma dos noves fora do subtraendo e da diferença for igual ao noves-fora minuendo. Portanto, na verificação da operação da subtração através da prova dos nove fazemos, na realidade, a prova dos nove da adição gerada pela “prova real”¹ daquela subtração já que a diferença $a - b = c$ é transformada na adição $b + c = a$.

Noves-fora...	
<i>do subtraendo</i>	<i>da soma dos noves-fora da diferença e do subtraendo</i>
<i>da diferença</i>	<i>do minuendo</i>

Abaixo temos duas situações que podem ser evidenciadas no cotidiano de cada um de nós. Efetue a operação e tire a prova dos nove para verificar se a subtração está correta.

Exemplos: Analise a operação e complete o quadro ao lado

236

-172

064

31.643

-12.961

18682

¹ São verificações de contas a partir de suas operações inversas

Exercício 4: Marcos possui 128 figuras de um álbum de figurinhas, sendo 46 repetidas. Quantas figurinhas sem repetição possui Marcos?

OBS: Efetue a operação e tire a prova dos nove para verificar se a subtração está correta

Exercício 5: Reflita sobre como a prova dos nove para a subtração se relaciona com a prova real da subtração.

PARTE 6: PROVA DOS NOVE PARA A OPERAÇÃO DE MULTIPLICAÇÃO

A prova dos nove para a verificação de uma multiplicação é feita da seguinte forma: primeiro tiramos os nove-foras do multiplicando e do multiplicador, depois, fazemos o produto entre estes nove-foras. Deste último resultado, calculamos seus nove-fora. Calculamos também o nove-fora do produto. A operação estará correta se os dois últimos resultados forem iguais.

Noves-fora...	
<i>do multiplicando</i>	<i>do produto dos nove-fora do multiplicando e do multiplicador</i>
<i>Do multiplicador</i>	<i>da produto (resultado da operação)</i>

Exemplos: Analise a operação e complete o quadro ao lado

$$\begin{array}{r} 2.435 \\ \times 6 \\ \hline 14.610 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4.678 \\ \times 8 \\ \hline 34.724 \end{array}$$

Exercício 6: Em uma pizzaria de Mossoró, o preço de uma pizza de chocolate custa R\$ 28,00. Se um grupo de amigos comer 3 pizzas, quanto pagará?

OBS: Efetue a operação e tire a prova dos nove para verificar se a multiplicação está correta

Exercício 7: Num estádio de futebol, uma mulher leva de sua casa uma caixa com 60 picolés, se o preço de cada um custa R\$ 1,50. Se ele vender todos, com quanto em dinheiro voltará para casa?

OBS: Efetue a operação e tire a prova dos nove para verificar se a multiplicação está correta

Demonstração 3: a prova dos nove vale para as multiplicações.

Produto entre dois fatores (com os números definidos como na Demonstração 1)

Supondo: $a \cdot b = c$

Temos: $(9q_1 + r_1) \cdot (9q_2 + r_2) = 9q_3 + r_3$

Logo: $81q_1 \cdot q_2 + 9q_1 \cdot r_2 + 9q_2 \cdot r_1 + r_1 \cdot r_2 = 9q_3 + r_3$

Então: $9(9q_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot r_2 + q_2 \cdot r_1) + r_1 \cdot r_2 = 9q_3 + r_3$

Veja que se: $r_1 \cdot r_2$ (produto dos nove-fora dos fatores) = r_3 (nove-fora do produto)
Agora de acordo com as suas conclusões, complete a tabela abaixo, de acordo com a relação dos nove-fora.

multiplicando	r_1	$r_1 \cdot r_2$	Multiplicando X multiplicador produto
multiplicador	r_2	r_3	

Conclusão: vimos que o nove-fora do produto dos nove-fora dos fatores é igual ao nove-fora do produto (da operação inicial).

PARTE 7: PROVA DOS NOVE PARA A OPERAÇÃO DE DIVISÃO

O algoritmo da divisão euclidiana diz que em uma divisão, o produto entre o quociente e o divisor e somado com o resto, é igual ao dividendo. Então, a prova dos nove da divisão segue esta relação do algoritmo da divisão, ou seja, calcula-se o nove-fora do divisor, em seguida do quociente, multiplica-se ambos e calculam-se os nove-fora que será somado com o nove-foras do resto da divisão e tira-se novamente o nove-fora. Finalmente, o resultado encontrado deve ser igual ao nove-fora do dividendo.

Abaixo temos duas situações que podem ser evidenciadas no cotidiano de cada um de nós. Efetue a operação e tire a prova dos nove para verificar se a divisão está correta.

Exemplos: Analise a operação e complete o quadro ao lado

a) $2.435 \div 2 =$

b) $35.1256 \div 3 =$

Exercício 8: O professor levou para a sala de aula do 6º ano 2 pacotes de balas contendo 40 balas cada um. O professor pretende distribuir as balas com sua turma de 25 alunos. Quantas balas cada aluno receberá e quantas balas sobrarão?

--

Exercício 9: Uma turma vai fazer uma excursão para a praia de Iracema em Fortaleza, a empresa de ônibus cobrou R\$ 1.500,00 pela viagem. Sabendo que a turma é formada por 35 alunos e que os professores que vão se comprometeram em pagar o resto dessa divisão, quanto cada aluno pagará?

Exercícios adicionais: Demonstração

Verifique formalmente, com uma demonstração tal como feita para as anteriores, que a prova dos nove é válida para qualquer subtração e qualquer divisão.

PARTE 8: REFLEXÃO FINAL

Verifique se operação $123584 + 27569 = 151513$ está correta pela prova dos nove usando o processo dos nove-fora. O que diz a prova dos nove sobre a operação? A que conclusões podemos chegar?

O fato da prova dos nove garantir não garantir que uma operação está correta poderia explicar (ou justificar) sua saída do currículo escolar? Comente.

Será que existe uma prova dos 3 ou dos 5? De alguns exemplos de como ela para uma alguma das operações mencionadas durante essa atividade.

Analisando a resposta anterior, como você poderia explicar o sucesso da prova dos nove em relação a outros tipos de verificação de operações (como a “prova dos três” ou “prova dos cinco”)? Há alguma relação com o conceito de raiz digital?

Para ver mais:

Vídeo “Isto é Matemática T06E02 Noves Fora”

(<https://www.youtube.com/watch?v=PG-7wNmRUkw>)

5 CONCLUSÃO

Esperamos que a aplicação dessa atividade sirva como incentivo a produção de outras atividades envolvendo os conteúdos que geram curiosidade entre nós professores e futuros professores de Matemática. Levando em consideração conteúdos que desaparecem do currículo, outros que em determinado período alteram-se no sumário dos livros didáticos. Assim, poderemos compreender melhor o estudo da História da Educação Matemática (HEM), pois para Valente (2010), ela

leva ao processo de dar sentido aos conteúdos que são ensinados na escola elementar. Por que a escola básica ensina o que ensina em matemática? Essa parece ser a questão central. Colocar o professorando em situações de desequilíbrio, onde o saber matemático das disciplinas da grade de formação do licenciando não dá conta de explicar as razões da existência ou ausência de temas matemáticos no rol das atividades matemáticas presentes na prática do professor, poderá leva-lo à reconstrução dos saberes elementares em termos historicamente sustentáveis.

Diante disso, esperamos que a prática com o manuseio de livros didáticos, possa proporcionar a todos os envolvidos nessa atividade (alunos, professores) a vivência de momentos únicos de manuseio de livros que, em muitos momentos do estudo da História da Educação Matemática só são citados ao longe. Os estudantes devem se permitir perceber o que a literatura relativa ao Movimento da Matemática Moderna (MMM) chamou de excessivo formalismo e uso ostensivo da teoria dos conjuntos.

Em outro momento a prova dos nove, que por vezes aparece em ditos populares, agora deve ser aprendida e compreendida por professores e futuros professores de Matemática que não tinham noção de como funcionava e, por isso, poderiam até se sentir menosprezados ao serem indagados por um pai ou qualquer pessoa da sociedade sobre o tema.

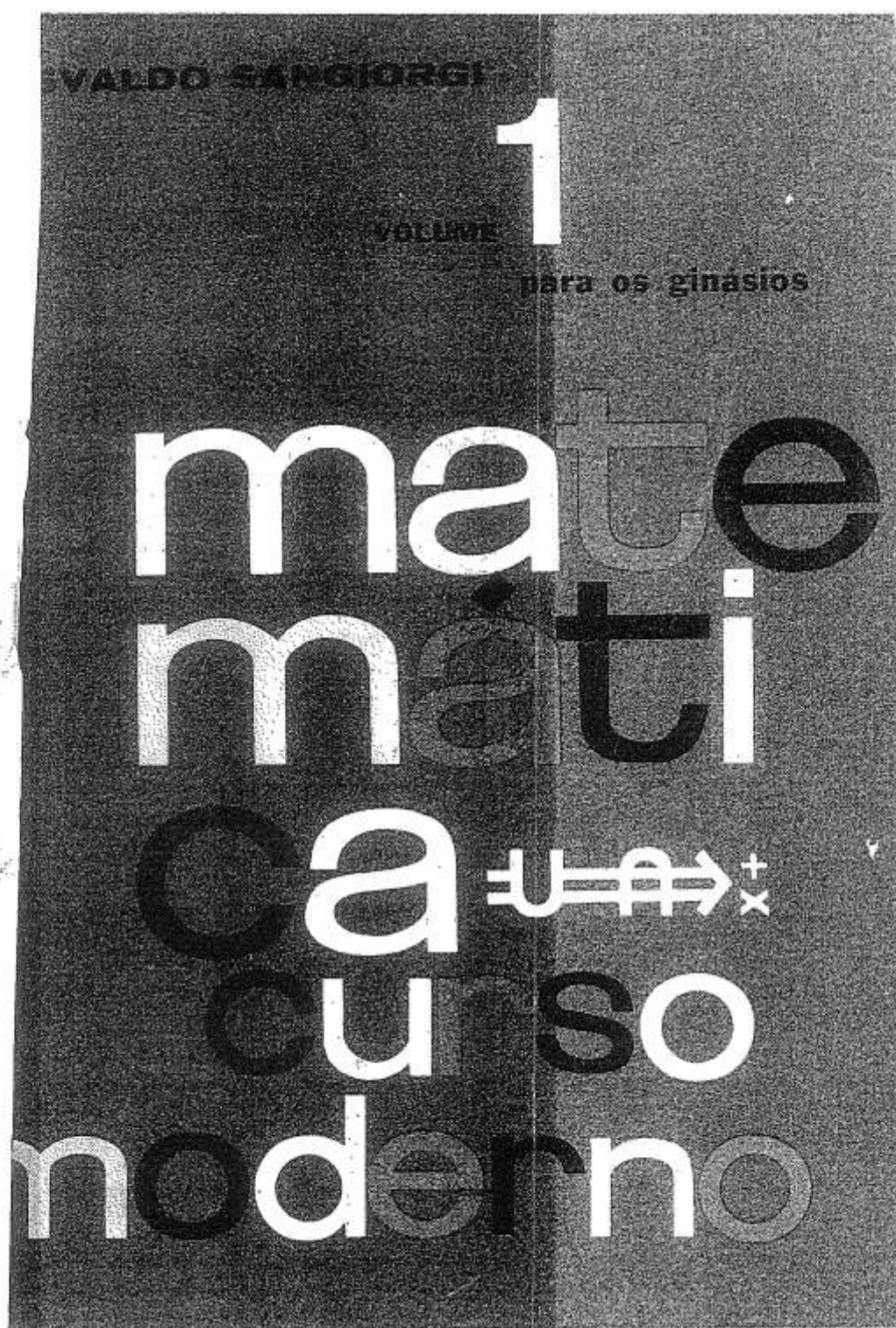
Podemos ainda, com o desenvolvimento dessa atividade, perceber que o estudo da HEM é mais produtivo quando apoiado por atividades práticas – sempre pautadas em fontes bibliográficas diversas e de qualidade – e que permitam a investigação e o diálogo entre os aprendentes e, felizmente, podermos conduzir uma boa interação professor/alunos.

Consideramos, por fim, que as duas sequências didáticas que compõem esse produto educacional, podem ser aplicadas, com certas adaptações, em turmas do ensino regular do Ensino Fundamental e na formação continuada de professores, ainda com o objetivo de apresentar aos jovens outras matemáticas que fizeram parte da escola em momentos passados.

6 REFERÊNCIAS

- ALVES, J. T. D., GUTIERRE, L. S. **Um olhar para a disciplina de História da Educação Matemática (HEM) na UFRN.** In: Gutierre, L. S., Cury, F. G. (Orgs.). *Pesquisas em História da Educação Matemática: produções do GPEP*. Natal: EDUFRN, 2016.
- BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini.** 8. Ed. São Paulo: Moderna, 2015.
- LACAVA, A. G. **Um estudo sobre diferentes abordagens da prova dos nove, presente em livros didáticos de aritmética (1890-1970).** 159 f. Trabalho de conclusão de curso (Mestrado) - Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade federal de Santa Catarina, Rio Grande do Sul, 2017.
- LACAVA, A. G.; COSTA, D. A. **A prova dos nove e o caso da “Aritmética Primária” de Cesar Pinheiro.** REVEMAT. Florianópolis (SC), v. 11, n. 1, p. 54-73, 2016.
- NUNES, C. A. **Disciplina História da Educação na formação de professores: desafios contemporâneos.** *História da Educação*, (19), (p. 173-180), 2006.
- SANGIORGI, O. **Matemática: Curso Moderno para Cursos Ginasiais.** 6 ed. Rio de Janeiro: Companhia Editora Nacional, 1963.
- THIOLLENT, Michel. **Metodologia da pesquisa-Ação.** 18 ed. São Paulo: Cortez, 2011.
- VALENTE, W. R. **História da educação matemática: considerações sobre suas potencialidades na formação do professor de matemática.** *Bolema*, v.23, n. 35A, p. 123-136, 2010.

7 ANEXOS (LIVROS DE SANGIORGI E BIACHINI)



Prêmio *Jabuti* — 1963 em Ciências Exatas,
outorgado pela
Câmara Brasileira do Livro.

6.^a edição, revista

Todos os direitos reservados.
Interdita qualquer reprodução sem
permissão escrita do autor e dos editores.

1966

ilustrações e diagramação de
NESTOR BATTAGLIERO

obra composta e impressa
nas oficinas da
São Paulo Editora S. A.

Impresso nos Estados Unidos do Brasil
Printed in the United States of Brazil

PROGRAMA para um CURSO MODERNO de MATEMÁTICA

(Para os cursos ginasiais) *

Os seguintes assuntos, para serem desenvolvidos na primeira Série dos Ginásios, e distribuídos nos seguintes seis itens:

1. número e numeral — sistemas de numeração — bases;
2. operações (operações inversas) com os números inteiros — propriedades estruturais;
3. divisibilidade — múltiplos e divisores; números primos; fatoração completa;
4. números fracionários — operações (operações inversas); propriedades estruturais;
5. estudo intuitivo das principais figuras geométricas planas e espaciais;
6. sistemas de medidas; sistema decimal e sistemas não-decimais,

estão explicados neste Volume 1, e fazem parte dos vinte e quatro itens que compõem os Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para os Ginásios, com as respectivas sugestões para seu desenvolvimento, apresentadas pelo Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM), de São Paulo, em trabalho aprovado unânimemente pelo IV Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática (Belém, Pará, julho de 1962), e readaptados no Curso de Treinamento Básico para Professores Secundários (Diretoria do Ensino Secundário do Ministério da Educação e Cultura), realizado em Brasília, de 25 a 30 de novembro de 1963.

* Designação genérica do 1.º ciclo dos cursos médios, compreendendo os Ginásios, os Ginásios Modernos, os Ginásios Experimentais, os Ginásios Vocacionais, os Ginásios Industriais e os Ginásios Comerciais.

INDICE DA MATERIA

1

(Noção de conjunto; número; correspondência, 5-7-9
 Numeral, 14
 Sucessão de números; estrutura de ordem, 17-18
 Comparação de números, 19

(Sistemas de numeração. Bases, 24
 Sistema de numeração decimal. Valor, posição, 25
 Sistemas de numeração antigos e modernos, 29-31
 Experimentos em diversas bases, 34

Classes Experimentais — Laboratório de Matemática, 40

3

(Números fracionários, 161
 Classe de equivalência entre frações, 174
 Estrutura de ordem com os números fracionários, 181
 Operações; propriedades estruturais, 188
 Problemas de aplicação; estruturas, 207

(Numerais decimais; operações, 214-218
 Dízimas periódicas; geratrizes, 224-228
 Potenciação e radiciação, 232

2

Idéia geral de operação; operação inversa, 47
 Adição de números inteiros; propriedades estruturais, 50-53
 Subtração; associação de adições e subtrações, 55-61
 Expressões numéricas — "pontuação". Problemas de aplicação, 62-65
 Multiplicação de números inteiros; propriedades estruturais, 67
 Divisão; associação de multiplicações e divisões, 72-80
 Problemas de aplicação; estruturas, 86
 Potenciação e radiciação de números inteiros, 96-101

Divisibilidade; relações "múltiplo de", "divisor de", 105
 Critérios de divisibilidade; propriedades dos restos, 110
 Número um; números primos; números compostos, 120
 Fatoração completa, 125
 Técnica operatória da radiciação; raiz quadrada, 134-136
 Operações: m.d.c. e m.m.c.; propriedades estruturais, 141-146

Medidas. Sistemas usuais, 240
 Sistema Métrico Decimal (S.M.D.), 246
 Comprimento de poligonais; circunferência, 254-257
 Unidades de área, 260
 Áreas das principais figuras planas, 265
 Unidades de volume; medidas de capacidade, 282-286
 Volumes dos principais sólidos; áreas laterais, 289
 Unidades de massa, 302

Sistemas de medidas não-decimal, 307
 Medida do tempo; de ângulos planos, 308-310
 Sistema Inglês de Medidas (S.I.M.), 315
 Conversões; operações com números não-decimais, 318-321

4

Do mesmo autor:

Guia para uso dos Professores — correspondente à *Matemática*, 1 — Curso Moderno.
Matemática, 2 — Curso Moderno.
Guia para uso dos Professores — correspondente à *Matemática*, 2 — Curso Moderno.
Matemática, 3 — Curso Moderno.
Matemática, quarta série ginásial.
Matemática e Estatística, para os Institutos de Educação e Escolas Normais.
Programa de Admissão para os ginásios (em colaboração).

EDIÇÕES DA

COMPANHIA EDITORA NACIONAL

Rua dos Gusmões, 639

São Paulo 2, SP

UMA PALAVRA PARA VOCE QUE INICIA O GINÁSIO...



Meu caro estudante:

Você vai iniciar agora o estudo da *Matemática* de um modo diferente daquele pelo qual seus irmãos e colegas mais velhos estudaram.

Sabe por quê?

Porque *Matemática*, para eles, na maioria das vezes, era um "exagêro de cálculos", "problemas complicados, trabalhosos e fora da realidade" que a tornavam, quase sempre, um *fantasma*!

Hoje, na Era Atômica em que vivemos, isto é trabalho para as máquinas (os fabulosos computadores eletrônicos de que tanto falam os jornais...), razão pela qual você vai aproveitar o seu precioso tempo aprendendo o verdadeiro *significado* e as belas *estruturas* da *Matemática Moderna*. Então, você perceberá, por exemplo, uma certa *semelhança* entre o modo de raciocinar em *Matemática* e nas outras matérias de seus estudos, como Português, História, Geografia, Ciências, Música, Educação Física, etc.

Fazer conhecer *Matemática* dessa forma é o principal objetivo d'êste livro em que você vai começar a estudar e que se completará com o auxílio indispensável de seu professor.

Vamos, pois, estudar *Matemática* com prazer!

Felicidades e até o próximo ano.

OSVALDO SANGIORGI

Os múltiplos comuns de 4 e 6 são aqueles que pertencem, ao mesmo tempo, aos dois conjuntos e, portanto, formam o conjunto-intersecção:
 $[4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, \dots] \cap [6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, \dots] = [12, 24, \dots]$

Como você está observando, o conjunto dos múltiplos comuns de dois números é infinito, isto é, vai crescendo cada vez mais. Daí o fato de não existir o "maior múltiplo comum"; existe, porém, o menor múltiplo comum.

15. Operação: mínimo múltiplo comum; resultado: menor múltiplo comum.

O nome já está "dizendo": o menor dos múltiplos comuns de dois ou mais números é denominado MENOR MÚLTIPLO COMUM desses números. Assim, no exemplo acima, o menor dos múltiplos comuns dos números 4 e 6 é o 12 (o menor elemento do conjunto-intersecção).

A operação que permite determinar o menor múltiplo comum de dois (ou mais) números é denominada mínimo múltiplo comum. Indicação:

$$\begin{array}{l} \text{m.m.c. } (4, 6) = 12 \\ \text{ou} \quad 4 \text{ M } 6 = 12 \end{array}$$

Erro comum: Confundir mínimo múltiplo comum, que é uma OPERAÇÃO(*), com menor múltiplo comum, que é o RESULTADO da operação.

Consideremos outros exemplos da operação m.m.c. no conjunto-universo dos números naturais:

1. Determinar o menor múltiplo comum dos números 4 e 5.

Temos:

múltiplos de 4: $\{4, 8, 12, 16, 20, 24, \dots\}$

múltiplos de 5: $\{5, 10, 15, 20, 25, 30, \dots\}$

múltiplos comuns: $\{4, 8, 12, 16, 20, 24, \dots\} \cap \{5, 10, 15, 20, 25, \dots\} =$
 $= \{20, 40, \dots\}$

↑
menor múltiplo comum

Logo: $4 \text{ M } 5 = 20$ ou m.m.c. $(4, 5) = 20$.

OBSERVAÇÃO: Repare que os números 4 e 5, primos entre si, têm por menor múltiplo comum o produto deles (20).

(*) Poder-se-ia chamá-la também de minimização.

1. Determinar o *menor divisor comum* entre 4, 6 e 8. Temos:

múltiplos de 4: {4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, ...}

múltiplos de 6: {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, ...}

múltiplos de 8: {8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, ...}

A primeira *intersecção* dá os múltiplos comuns de 4 e 6:

$$\{4, 8, 12, 16, 20, 24, \dots\} \cap \{6, 12, 18, 24, 30, \dots\} = \{12, 24, \dots\}$$

A seguir, a *intersecção* do conjunto obtido com o terceiro conjunto dará:

$$\{12, 24, \dots\} \cap \{8, 16, 24, 32, \dots\} = \{24, 48, \dots\}$$

↑
menor múltiplo comum

Logo: m.m.c. (4, 6, 8) = 24 ou $4M6M8 = 24$

OBSERVAÇÃO: A operação mínimo múltiplo comum é também *associativa*, isto é:

$$(4M6)M8 = 4M(6M8) \text{ Verifique!}$$

Atenção: Vale a mesma nota importante escrita para a operação máximo divisor comum, isto é, você está conhecendo, agora, o conceito da operação mínimo múltiplo comum. Depois, verá a técnica de cálculo dessa operação!

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 31

1. Escrever o conjunto dos *divisores* dos seguintes números:
1.º) 6 2.º) 12 3.º) 15 4.º) 8 5.º) 36 6.º) 21 7.º) 48 8.º) 50
2. Calcular (usando a *intersecção*) o conjunto dos *divisores comuns* dos seguintes números:
1.º) 6 e 26 2.º) 8 e 6 3.º) 6, 8 e 12 4.º) 21, 36 e 48
3. Valendo-se dos resultados anteriores dizer qual é o *maior divisor comum* dos números dos exercícios 1.º), 2.º), 3.º) e 4.º) do 1?
4. Qual é o *maior divisor comum* dos seguintes números:
1.º) 8 e 8 2.º) 1 e 8 3.º) 8 e 1 4.º) 3 e 4 5.º) 4 e 3 6.º) 8 e 4
5. Efetuar: 1.º) $17D2$ (o mesmo que m.d.c. (17, 2))
2.º) $4D6D8$ 3.º) $8D12D16D28$
6. Escrever o conjunto dos *múltiplos* dos seguintes números (lembre-se que são conjuntos infinitos!):
1.º) 5 2.º) 4 3.º) 8 4.º) 12 5.º) 10 6.º) 6 7.º) 18 8.º) 20
7. Escrever o conjunto dos múltiplos, *menores que 50*, dos seguintes números (agora os conjuntos são finitos!):
1.º) 5 2.º) 8 3.º) 10 4.º) 18

8. Calcular (usando a *intersecção*) o conjunto dos múltiplos comuns dos números seguintes:
1.º) 5 e 4 2.º) 5 e 10 3.º) 8 e 12 4.º) 6, 12 e 18
9. Valendo-se dos resultados do Exercício 8, dizer qual é o menor múltiplo comum dos números dos exercícios 1.º), 2.º), 3.º) e 4.º).
10. Determinar a *intersecção* dos seguintes conjuntos:
1.º) conj. dos múltiplos de 3 com o conj. dos múltiplos de 9 menores que 36;
2.º) conj. dos números pares com o conj. dos múltiplos de 5 menores que 35;
3.º) conj. dos números pares com o conj. dos números ímpares.
11. Qual é o menor múltiplo comum dos seguintes números:
1.º) 8 e 8 2.º) 1 e 8 3.º) 8 e 1 4.º) 3 e 4 5.º) 4 e 3 6.º) 8 e 4
12. Efetuar: 1.º) 18M12 (mesmo que m.m.c. (18, 12))
2.º) 2M5M6 3.º) 3M8M12M4

Propriedades Estruturais das Operações m.d.c. e m.m.c.

Você acabou de estudar mais duas operações: máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, cujos conceitos foram fixados através da linguagem de *intersecção de conjuntos*.

É natural — como aliás aconteceu com as demais operações estudadas — que, operando com números maiores que os apresentados nos exemplos, você conheça uma *técnica de cálculo* que facilite a obtenção dos resultados dessas operações. No caso das operações m.d.c. e m.m.c., essas técnicas (baseadas na decomposição em fatores primos), conhecidas desde a Escola Primária, serão reestudadas a seguir.

Antes, porém, cabe uma pergunta:

As operações m.d.c. e m.m.c., definidas no conjunto-universo dos números inteiros, gozam das mesmas propriedades estruturais (fechamento, comutativa, elemento neutro, ...) válidas para as operações já estudadas (adição, multiplicação, ...)?

Resposta: SIM, também gozam das mesmas propriedades estruturais!

Observe:

Propriedades da operação m.d.c.: (*)

- 1.º) FECHAMENTO: o maior divisor comum de dois números inteiros quaisquer é sempre um número inteiro. Ex.:

$$\begin{array}{ccc} & 4 \text{ D } 6 = 2 & \\ \swarrow & \downarrow & \searrow \\ \text{inteiro} & \text{inteiro} & \text{inteiro} \end{array}$$

(*) Nesse estudo será considerado, por *definição*, que $0 \text{ D } 0 = 0$ (intersecção de dois conjuntos vazios é o conjunto vazio).

- 2.^a) COMUTATIVA: a ordem dos números não altera o maior divisor comum entre eles.

Ex.: $4 D 6 = 6 D 4$ (Verifique você mesmo!)

- 3.^a) ELEMENTO NEUTRO: 0, pois: $4 D 0 = 0 D 4 = 4$ (lembre-se que 0 é divisível por todos os números naturais e, portanto, pelo 4!)

- 4.^a) ASSOCIATIVA: $(4 D 6) D 8 = 4 D (6 D 8)$ (É fácil verificar...)

OBSERVAÇÃO: Como aplicação do elemento neutro se o 0 figurar, juntamente com outros números, pode-se desprezá-lo na operação m.d.c.. Ex.: m.d.c. (8, 6, 0, 12) = m.d.c. (8, 6, 12).

Propriedades da operação m.m.c. (conjunto-universo: conjunto dos números naturais)

- 1.^a) FECHAMENTO: o menor múltiplo comum de dois números naturais quaisquer é sempre um número natural. Ex.:

$$\begin{array}{ccc} & 4 M 6 = 12 & \\ \swarrow & \downarrow & \searrow \\ \text{natural} & \text{natural} & \text{natural} \end{array}$$

- 2.^a) COMUTATIVA: a ordem dos números não altera o menor múltiplo comum entre eles.

$$4M6 = 6M4 \text{ (Verifique você mesmo!)}$$

- 3.^a) ELEMENTO NEUTRO: 1, pois: $4M1 = 1M4 = 4$ (lembre-se que o 1 é divisor de todos os números inteiros e, portanto, de 4)

- 4.^a) ASSOCIATIVA: $(4M6)M8 = 4M(6M8)$ (É fácil verificar...)

OBSERVAÇÃO: Como aplicação do elemento neutro se o 1 figurar, juntamente com outros números, pode-se desprezá-lo na operação m.m.c.. Ex.:

$$\text{m.m.c. (8, 6, 1, 12)} = \text{m.m.c. (8, 6, 12)}.$$

Propriedade DISTRIBUTIVA que relaciona as duas operações:

- 1.^a) Propriedade DISTRIBUTIVA do D em relação ao M:

$$8D(4M3) = (8D4)M(8D3) \quad (\text{Faça você os cálculos e verifique que essa sentença é verdadeira})$$

- 2.^a) Propriedade DISTRIBUTIVA do M em relação ao D:

$$8M(4D3) = (8M4)D(8M3) \quad (\text{idem})$$

NOTA CURIOSA: Repare bem que a propriedade DISTRIBUTIVA vale tanto de D para M como de M para D!

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 32

- Nas seguintes igualdades dizer qual a operação efetuada e o nome do resultado:
 1.º) $8 \text{ D } 36 = 4$ 2.º) $5 \text{ M } 20 = 20$
- Dizer as propriedades que estão sendo aplicadas em:
 1.º) $6 \text{ D } 4 = 2$ 6.º) $6 \text{ M } 4 = 12$
 2.º) $12 \text{ D } 8 = 8 \text{ D } 12$ 7.º) $9 \text{ D } 0 = 9$
 3.º) $1 \text{ M } 5 = 5$ 8.º) $6 \text{ D } (8 \text{ M } 5) = (6 \text{ D } 8) \text{ M } (6 \text{ D } 5)$
 4.º) $(4 \text{ D } 8) \text{ D } 7 = 4 \text{ D } (8 \text{ D } 7)$ 9.º) $(12 \text{ M } 5) \text{ M } 3 = 12 \text{ M } (5 \text{ M } 3)$
 5.º) $3 \text{ M } 4 = 4 \text{ M } 3$ 10.º) $7 \text{ M } (6 \text{ D } 8) = (7 \text{ M } 6) \text{ D } (7 \text{ M } 8)$
- Se $1 \text{ D } 1 = 1$, $2 \text{ D } 2 = 2$, $3 \text{ D } 3 = 3$, ... então $a \text{ D } a = \dots$
- Verificar se é V ou F (assinale ao lado):
 1.º) O maior divisor comum de 21 e 7 é a unidade.
 2.º) O menor múltiplo comum entre 0 e 4 é 0.
 3.º) O conjunto dos divisores de 12 é fechado em relação à operação D.
- Colocar, convenientemente, os parênteses ("pontue"), a fim de tornar verdadeiras as seguintes sentenças:
 1.º) $4 \text{ D } 2 \text{ M } 6 = 2$ 2.º) $4 \text{ D } 2 \text{ M } 6 = 6$

Técnicas de cálculo para as operações: m.d.c. e m.m.c.; consequências e aplicações

I. Operação máximo divisor comum (m.d.c.)

16. Determinação do maior divisor comum por fatoração completa

- Decompõem-se os números em seus fatores primos (fatoração completa);
- Multiplicam-se os fatores primos comuns tomados com seus menores expoentes; o produto deles é o maior divisor comum. Exemplos:

1. Efetuar o m.d.c. (18, 24, 30)

Como:

$$\left. \begin{array}{l} 18 = 2^1 \times 3^2 \\ 24 = 2^3 \times 3^1 \\ 30 = 2^1 \times 3^1 \times 5 \end{array} \right\} \rightarrow \text{fatores primos comuns (2 e 3) com os menores expoentes: } 2^1 \text{ e } 3^1$$

$$\text{Logo: m.d.c. (18, 24, 30) = } 2^1 \times 3^1 = \boxed{6}$$

2. Efetuar o m.d.c. (693, 108, 90)

Como:

$$\left. \begin{array}{l} 693 = 3^2 \times 7^1 \times 11^1 \\ 108 = 2^3 \times 3^3 \\ 90 = 2 \times 3^2 \times 5 \end{array} \right\} \rightarrow \text{fatores primos comuns (o \u00fanico \u00e9 o 3)} \\ \text{com os menores expoentes: } 3^2$$

Portanto: m.d.c. (693, 108, 90) = $3^2 = \boxed{9}$

17. *Determina\u00e7\u00e3o do maior divisor comum por divis\u00f5es sucessivas; disposi\u00e7\u00e3o pr\u00e1tica de Euclides*

Pode-se, tamb\u00e9m, determinar o m.d.c. de dois n\u00fameros, dividindo-se o maior pelo menor; se a divis\u00e3o f\u00f4r exata o maior divisor comum ser\u00e1 o menor d\u00e9les. Se a divis\u00e3o n\u00e3o f\u00f4r exata, divide-se o menor pelo resto e assim sucessivamente. O \u00faltimo divisor ser\u00e1 o maior divisor comum.

\u00c9sse \u00e9 o processo que voc\u00ea conhece desde o Curso Prim\u00e1rio, n\u00e3o \u00e9?

Essas divis\u00f5es voc\u00ea as fazia, usando um dispositivo pr\u00e1tico atribuído a Euclides, que foi um dos mais not\u00e1veis matem\u00e1ticos gregos da antiguidade. Exemplo:

1. Efetuar o m.d.c. (693, 108, 90)

Primeiramente podemos achar o maior divisor comum entre 693 e 108:

$$\begin{array}{r|rrrr} 693 & 108 & 45 & 18 & \boxed{9} \\ 45 & 18 & 9 & 0 & \end{array}$$

e, a seguir, determinamos o maior divisor comum de 90 e o primeiro resultado encontrado: 9.
Logo:

$$\begin{array}{r|rr} 90 & \boxed{9} \\ 0 & \end{array}$$

Portanto: m.d.c. (693, 108, 90) = $\boxed{9}$

2. Efetuar o m.d.c. (4, 5)

Temos:

$$\begin{array}{r|rr} 5 & 4 & \boxed{1} \\ 1 & 0 & \end{array} \quad \text{Logo: m.d.c. (4,5) = } \boxed{1}$$

18. Consequências

- 1.^a) O maior divisor comum de dois números, em que o maior é divisível pelo menor, é o MENOR. Exemplo:

$$\text{m.d.c.}(8,4) = 4 \text{ (bem natural, pois, o menor é fator do maior)}$$

- 2.^a) o maior divisor comum de dois números primos entre si é 1. Exemplo:

$$\text{m.d.c.}(4,5) = 1 \text{ (já vimos que o 1 é o único fator e é o maior)}$$

- 3.^a) os divisores comuns de vários números são divisores de seu maior divisor comum. De fato, os divisores comuns de vários números são constituídos de fatores primos comuns que, necessariamente, devem figurar no maior divisor comum. Exemplo:

Determinar os divisores comuns de 48 e 60.

Como: $\text{m.d.c.}(48,60) = 12$, os divisores comuns de 48 e 60 são, logicamente, os divisores de 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12

- 4.^a) multiplicando ou dividindo dois ou mais números por um certo número (diferente de zero), seu maior divisor comum ficará multiplicado ou dividido por esse número. Com efeito, multiplicando os números dados por um certo número, você introduzirá novos fatores que, forçosamente, figurarão no maior divisor comum. Exemplo:

Como: $\text{m.d.c.}(18, 12) = 6$, multiplicando 18 e 12 por 2, obteremos:

$$\text{m.d.c.}(18 \times 2, 12 \times 2) = 6 \times 2 \text{ (Verifique!)}$$

No caso de você dividir os dois números pelo próprio maior divisor comum deles (no exemplo 6), então os quocientes que você obterá serão primos entre si, pois: $\text{m.d.c.}(18 : 6, 12 : 6) = 6 : 6 = 1$

Esta consequência é aplicada para simplificar o cálculo. Assim, por exemplo: efetuar o $\text{m.d.c.}(1200, 1800)$ é o mesmo que efetuar o $\text{m.d.c.}(12,18) = 6$, e a seguir multiplicar 6 por 100, isto é:

$$\text{m.d.c.}(1200, 1800) = 600$$

19. Aplicações em exercícios diversos

1. Determinar os dois menores números pelos quais devemos dividir 144 e 160, a fim de obter quocientes iguais.

Primeiramente determina-se o maior divisor comum de 144 e 160, isto é: $\text{m.d.c.}(144, 160) = 16$.

Como: $144 : 16 = 9$ e sendo 16 o maior divisor de 144, o menor quociente será 9;

$160 : 16 = 10$ também 16 é o maior divisor de 160 e, portanto, o menor quociente será 10.

Logo, os números procurados são: 9 e 10, pois $\begin{cases} 144 : 9 = 16 \\ 160 : 10 = 16 \end{cases}$

2. Na procura do maior divisor comum de dois números, pelo processo das divisões sucessivas, encontrei os quocientes, 1, 2 e 6 e os restos 432, 72 e 0, respectivamente. Determine os dois números.

O exercício tem o seguinte "esquema":

	1	2	6
?	?	432	72
432	72	0	

Procedendo, inversamente da ordem que se emprega no método das divisões sucessivas, o 72, por ser o penúltimo resto (o último é o 0) é o maior divisor comum dos números procurados. Logo:

$$2 \times 432 + 72 = 936 \text{ (que é o segundo número procurado)}$$

$$1 \times 936 + 432 = 1\,368 \text{ (que é o primeiro número procurado)}$$

3. Um terreno de forma retangular tem as dimensões: 24m de frente e 56m de fundo. Qual deve ser o comprimento do maior cordel que sirva para medir *exatamente* as duas dimensões?

Como: $\text{m.d.c.}(56, 24) = 8$, segue-se que o maior cordel que pode ser usado para medir o terreno deve ter 8m, pois, 8 é o maior divisor comum de 56 e 24.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 33

- Dos divisores comuns aos números 48 e 72, determinar (usando qualquer processo ensinado):
 - os pares;
 - os múltiplos de 3;
 - o maior deles
- Efetuar (usando as técnicas de cálculo ensinadas):
 - m.d.c. (120, 384);
 - m.d.c. (3 600, 4 050);
 - m.d.c. (185, 222, 259);
 - m.d.c. (128, 136, 256, 440);
 - m.d.c. (6 804, 47 952, 228 456).
- Usando as *consequências* estudadas, efetuar:
 - m.d.c. (48, 2);
 - m.d.c. (7, 9);
 - m.d.c. (1 200, 60, 30);
 - m.d.c. (15, 26, 29);
 - m.d.c. (12, 4, 0).
- Encontrar todos os números compreendidos entre 100 e 500 que tenham 102 por maior divisor comum.
- Na procura do maior divisor comum de dois números, pelo método das divisões sucessivas, encontrei os quocientes 1, 3 e 2, e os restos 48, 24 e 0, respectivamente. Quais são esses dois números?

6. Calcular os dois menores números pelos quais devemos dividir 180 e 204, a fim de que os quocientes sejam iguais.
7. Determinar os divisores comuns dos números 80 e 130 que sejam múltiplos comuns de 5 e 10.
8. Dados dois números: 182 e 238, verificar que o maior divisor comum deles é também o maior divisor comum entre o menor (182) e a sua diferença ($238 - 182 = 56$).
9. Quer-se dividir três peças de fazenda que medem, respectivamente, 90, 108 e 144 metros, em partes iguais e do maior tamanho possível. Determinar o número das partes de cada peça e o comprimento do maior tamanho.
10. Deseja-se cercar de árvores, plantadas a maior distância comum um terreno de forma quadrilátera. Quantas árvores são necessárias, se os lados do terreno medem, respectivamente, 3 150m, 1 980m, 1 512m e 1 890m?

LEMBRETE AMIGO

Não se esqueça que o maior divisor comum de dois números primos entre si é 1; e que o de dois números em que o maior é divisível pelo menor é o MENOR.

II. Operação mínimo múltiplo comum (m.m.c.)

20. Determinação do menor múltiplo comum por fatoração completa

- 1.º) Decompõem-se os números em seus fatores primos (fatoração completa)
- 2.º) Multiplicam-se todos os fatores primos (comuns e não-comuns) considerados, cada um, com seu maior expoente; o produto deles é o menor múltiplo comum.

Esta regra é rapidamente justificada, desde que você lembre o seguinte fato: um número para ser múltiplo comum de outros deve possuir, pelo menos, os fatores desses outros. Exemplos:

1. Efetuar o m.m.c. (4, 6, 8)

Como:

$$\left. \begin{array}{l} 4 = 2^2 \\ 6 = 2^1 \times 3^1 \\ 8 = 2^3 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \text{fatores primos comuns (maiores expoentes): } 2^3 \\ \text{fatores primos não-comuns (maiores expoentes): } 3^1 \end{array}$$

$$\text{Logo: m.m.c. (4, 6, 8) = } 2^3 \times 3^1 = 8 \times 3 = \boxed{24}$$

Exemplo: Determinar o menor múltiplo comum de 12 e 15, por intermédio da operação m.d.c. (12, 15).

Temos: Sendo o m.d.c. (12, 15) = 3 e o produto: $12 \times 15 = 180$, vem:

$$\text{m.m.c. (12, 15)} = 180 : 3 = \boxed{60}$$

22. Consequências

1.^a) O menor múltiplo comum de dois números, em que o maior é divisível pelo menor, é o MAIOR. Exemplo:

$\text{m.m.c.}(8, 4) = 8$ (o que é evidente, pois, o maior é o primeiro múltiplo comum)

2.^a) O menor múltiplo comum de dois números primos entre si é o produto deles. Exemplo:

$\text{m.m.c.}(4, 5) = 20$ (bem natural, pois, o produto de dois números primos entre si é o primeiro múltiplo comum deles)

3.^a) Multiplicando ou dividindo dois ou mais números por um certo número (diferente de zero), seu menor múltiplo comum ficará multiplicado ou dividido por esse número. Vale a mesma explicação feita para a operação m.d.c. Exemplo:

Sendo: $\text{m.m.c.}(18, 12) = 36$, verifique você mesmo que, multiplicando por 2, os números 18 e 12, o menor múltiplo comum (36) aparecerá multiplicado, também, por 2.

23. Aplicações em exercícios diversos

1. Determinar os dois menores números pelos quais devemos multiplicar os números 24 e 36, a fim de obter produtos iguais.

Sendo o $\text{m.m.c.}(24, 36) = 72$ e $72 : 24 = 3$, $72 : 36 = 2$, segue-se que: 2 e 3 são os menores números que, multiplicados, respectivamente, por 24 e 36 dão produtos iguais.

2. Determinar todos os números compreendidos entre 1 000 e 3 000 e que sejam divisíveis, ao mesmo tempo, por 48, 60 e 72.

O primeiro múltiplo comum de 48, 60 e 72 é o menor múltiplo comum: 720. Logo, o exercício estará resolvido procurando os múltiplos de 720 compreendidos entre 1 000 e 3 000, isto é: $720 \times 2 = 1\,440$; $720 \times 3 = 2\,160$; $720 \times 4 = 2\,880$ (os demais múltiplos de 720 ultrapassam 3 000).

3. Três navios fazem viagens entre dois portos. O primeiro cada 4 dias, o segundo cada 6 e o terceiro cada 9 dias. Se esses navios partirem juntos, depois de quantos dias voltarão a sair juntos?

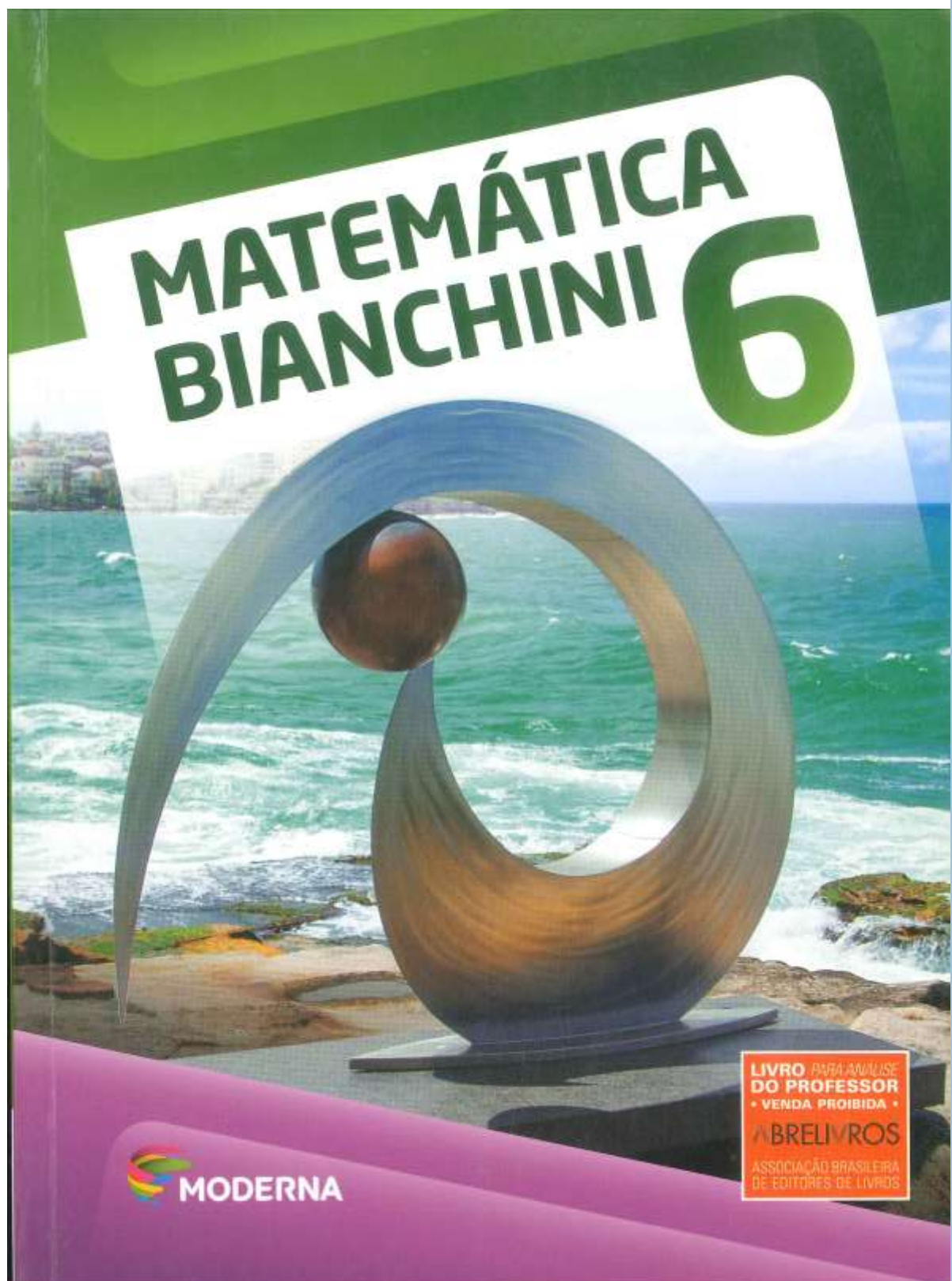
O primeiro múltiplo comum desses números é o menor múltiplo comum: 36. Logo, depois de 36 dias esses navios partirão juntos novamente.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 34

1. Efetuar (usando as técnicas de cálculo ensinadas):
 1.º m.m.c. (45, 12) 2.º m.m.c. (36, 96, 112) 3.º m.m.c. (48, 120, 96, 144)
 4.º m.m.c. (4 320, 6 480) 5.º m.m.c. (123, 205; 287)
2. Usando as *consequências* estudadas efetuar:
 1.º m.m.c. (48, 2) 2.º m.m.c. (7, 9) 3.º m.m.c. (1 200, 60, 30)
 4.º m.m.c. (5, 6, 11) 5.º m.m.c. (12, 4, 1) 6.º m.m.c. (8 916, 4)
3. Qual é a diferença entre o menor múltiplo comum e o maior divisor comum dos números 101 e 337?
4. O menor múltiplo comum de dois números é 11 352 e o maior divisor comum é 6. Se um dos números é 264 qual é o outro?
5. Qual é o produto de dois números, se o maior divisor comum entre eles é 8 e o menor múltiplo comum 48?
6. Determinar todos os números compreendidos entre 1 000 e 4 000 que sejam divisíveis, ao mesmo tempo, por 75, 150 e 180.
7. Calcular os dois menores números pelos quais devemos multiplicar os números 70 e 78, a fim de obter produtos iguais.
8. Numa República, o presidente deve permanecer 4 anos em seu cargo, os senadores 6 anos e os deputados 4 anos. Se em 1960 houve eleições para os três cargos em que ano realizar-se-ão novamente as eleições para esses três cargos?
9. Duas rodas de uma engrenagem têm 14 e 21 dentes, respectivamente. Cada roda tem um dente estragado. Se, num dado instante, estão em contacto os dois dentes estragados, depois de quantas voltas repetir-se-á novamente esse encontro?
10. Dois ciclistas percorrem a pista circular de um velódromo no mesmo sentido. O primeiro a percorre em 36 segundos e o segundo em 30. Tendo os ciclistas partido juntos, pergunta-se depois de quanto tempo encontrar-se-ão novamente no ponto de partida e quantas voltas dará cada um.

LEMBRETE AMIGO

Não se esqueça que o *menor múltiplo comum* de dois números primos entre si é o PRODUTO DELES; o de dois números em que o maior é divisível pelo menor é o MAIOR.



© Edwaldo Bianchini, 2015



Coordenação editorial: Mara Regina Garcia Gay
Edição de texto: Luana Fernandes da Souza, Mateus Coqueiro Deniel de Souza, Daniel Vitor Casaroli Santos, Izabel Batista Bueno, José Jackson Pinheiro da Almeida, Zuleide Maria Vilela da Motta
Preparação de texto: Izabel Batista Bueno, Zuleide Maria Vilela da Motta
Gestão de design e produção gráfica: Sêndia Botelho de Carvalho Homma
Coordenação de produção: Everson de Paula
Suporte administrativo editorial: Maria de Lourdes Rodrigues (coord.)
Coordenação de design e projetos visuais: Maria Carqueira Leite
Projeto gráfico: Everson de Paula, Adriano Moreno Barbosa, Otávio dos Santos
Capa: Otávio dos Santos
 Foto: Escultura B&F13, de Ben Fashen, Sydney, Austrália
 © Mymediabox/Alamy/Glow Images
Coordenação de arte: Patrícia Costa, Wilson Gazzini Agostinho
Edição de arte: Tiago Gomes Alves
Editoração eletrônica: Grapho Editoração
Edição de infografia: Luis Augusto Barbosa
Coordenação de revisão: Elaine C. del Nero
Revisão: Recliar Editorial
Coordenação de pesquisa iconográfica: Luciano Banza Gabarron
Pesquisa iconográfica: Andre Bolanho, Carol Bock, Mariana Alencar
Coordenação de bureau: Américo Jesus
Tratamento de imagem: Denise Felposa Maciel, Marina M. Buzzinero, Rubens M. Rodrigues
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira, Fabio N. Prezado, Heitor R de Souza Filho, Marcio H. Kamoto, Vitória Sousa
Coordenação de produção industrial: Viviane Pavan
Impressão e acabamento: Coen Indústria Gráfica Ltda.
 LOTE: 208234

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
 (Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Bianchini, Edwaldo

Matemática / Bianchini, Edwaldo. —
 8. ed. — São Paulo : Moderna, 2015.

Obra em 4 v. para alunos de 6º ao 9º ano.
 Bibliografia.

1. Matemática (Ensino fundamental) I. Título

15-02025

CDD-372.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino fundamental 372.7

ISBN 978-85-16-09981-7 (LA)

ISBN 978-85-16-09982-4 (LP)

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.

Rua Pedro de Almeida, 758 - Belém
 São Paulo - SP - Brasil - CEP 03003-904
 Vendas e Atendimento: Tel. (011) 2790-1500
 Fax (011) 2790-1501
 www.moderna.com.br
 2016
 Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 Números

1. Os números registram o mundo em que vivemos	14
2. Os números naturais	15
Comparando números naturais	16
Contando números	17
3. Os sistemas de numeração	18
O sistema egípcio de numeração	19
O sistema de numeração indo-arábico	20
O sistema romano de numeração	27
Trabalhando a informação	
Construindo tabelas	29
Diversificando	
Quando a base é outra	34

CAPÍTULO 2 Operações com números naturais

1. Os números e as operações	36
2. Adição	36
Propriedades da adição	38
3. Subtração	41
Relação entre a adição e a subtração	42
4. Expressões numéricas com adições e subtrações	44
Os sinais de associação em uma expressão numérica	44
5. Multiplicação	48
Outra ideia associada à multiplicação	51
Propriedades da multiplicação	54
6. Expressões numéricas com multiplicações	57
7. Divisão	58
Relação entre a multiplicação e a divisão	60
O resto de uma divisão	61
Relação fundamental da divisão	62
8. Expressões numéricas com divisões	64
Trabalhando a informação	
Interpretando um gráfico de colunas	65
9. Potenciação	68
Como ler as potências	69
Potências de expoente zero, de expoente 1 e de base 10	70
Números quadrados perfeitos	71

Trabalhando a informação

Interpretando um gráfico de barras 72

10. Radiciação 73**11. Expressões numéricas com potenciação e radiciação** 74**Diversificando**

Quadrado mágico 78

CAPÍTULO 3 Divisibilidade**1. Múltiplos e divisores** 80

Os múltiplos de um número 81

Os divisores de um número 83

2. Critérios de divisibilidade 85

Divisibilidade por 2 85

Divisibilidade por 5 86

Divisibilidade por 10 86

Divisibilidade por 3 88

Divisibilidade por 6 88

Divisibilidade por 9 90

Divisibilidade por 4 91

3. Números primos e números compostos 93

Decomposição em fatores primos 95

4. O máximo divisor comum 97

Encontrando o mdc pela decomposição em fatores primos 98

5. O mínimo múltiplo comum 100

Encontrando o mmc pela decomposição em fatores primos 101

Trabalhando a informação

Construindo um gráfico de colunas 104

Construindo um gráfico de barras 105

CAPÍTULO 4 Figuras geométricas**1. Um pouco de história** 110**2. Ponto, reta e plano** 111

O ponto e a reta 112

O plano 113

3. Posições relativas de duas retas em um plano 115**4. Semirreta** 117

Semirretas opostas 117

SUMÁRIO

5. Segmento de reta	118
Segmentos consecutivos	118
Segmentos colineares	118
Medida de um segmento de reta	120
6. Ângulos	122
O ângulo e o giro	124
Medida de um ângulo	124
Construção de um ângulo com o transferidor	126
Tipos de ângulo	127
Construção de retas perpendiculares	129

CAPÍTULO 5 Números racionais na forma de fração

1. Os números com os quais convivemos	134
2. Noção de número racional e a fração que o representa	135
Como se leem as frações	136
A forma percentual	139
Representando um ou mais inteiros na forma de fração	140
3. Ideias de fração	142
A fração como quociente	142
A fração como razão	145
Fração de uma quantidade	146
4. Frações equivalentes	150
Obtendo frações equivalentes	151
5. Simplificação de frações	154
6. Comparação de números escritos na forma de fração	156
Redução de frações a um denominador comum	158

Trabalhando a informação

Comparando chances	160
--------------------	-----

Diversificando

Usando referências	164
--------------------	-----

CAPÍTULO 6 Operações com números racionais na forma de fração

1. Adição e subtração	166
Com frações de mesmo denominador	166
Com frações de denominadores diferentes	168
2. Multiplicação	172
Quando um dos fatores é um número natural	172
Quando os dois fatores são escritos na forma de fração	174
Números racionais inversos	176

3. Divisão	179
Quando o divisor é um número natural	179
Quando o dividendo é um número natural	180
Quando o divisor e o dividendo estão na forma de fração	181
4. Potenciação	183
5. Raiz quadrada	185
6. Expressões numéricas	186

CAPÍTULO 7 Números racionais na forma decimal e operações

1. Números com vírgula	194
2. As frações decimais e a representação na forma decimal	195
3. Números na forma decimal	196
Leitura de números na forma decimal	199
4. Transformações entre frações e números decimais	201
Transformação de fração decimal em número na forma decimal	201
Transformação de número na forma decimal em fração decimal	201
5. Representações decimais equivalentes	202
6. Comparação de números racionais na forma decimal	204
7. Reta numérica	205
Representação dos números naturais	205
Representação dos números racionais na forma de fração	205
Representação dos números racionais na forma decimal	206
8. Adição e subtração com números na forma decimal	209
9. Multiplicação de números na forma decimal	212
Multiplicação de números na forma decimal por potências de 10	212
Multiplicação de números na forma decimal	214
Expressões numéricas envolvendo multiplicações	215
10. Divisão de números na forma decimal	217
Divisão de números na forma decimal por potências de 10	217
Divisão de números naturais com quociente na forma decimal	218
Divisão de números naturais com quociente aproximado	222
Divisão de dois números na forma decimal	223
11. Representação decimal de frações	228
Representação decimal finita	228
Dízima periódica	228
12. Potenciação de números na forma decimal	229
13. Expressões numéricas e problemas	231
Trabalhando a informação	
Probabilidade	232

SUMÁRIO

CAPÍTULO 8 Polígonos e poliedros

1. Linhas poligonais	238
Interior, exterior e convexidade	239
2. Polígonos	240
Elementos de um polígono	242
Classificação dos polígonos	244
3. Triângulos	245
Elementos de um triângulo	245
Classificação dos triângulos	245
Construção de triângulos	246
4. Quadriláteros	250
Classificação dos quadriláteros	250
5. Sólidos geométricos	252
6. Poliedros	255
Elementos de um poliedro	255
Classificação dos poliedros	256
Planificações	257
7. Prismas	262
Classificação dos prismas	262
Paralelepípedo reto-retângulo: um sólido especial	263
8. Pirâmides	265
Classificação das pirâmides	265
Diversificando	
Poliedros com massinha	267

CAPÍTULO 9 Medidas de comprimento e área

1. Algumas unidades de medida de comprimento	270
2. Origem do Sistema Internacional de Unidades	273
3. Metro, seus múltiplos e submúltiplos	273
Transformação de unidades	276
4. Perímetro	279
5. Medindo superfícies	283
Trabalhando a informação	
Diferentes categorias de variáveis em uma pesquisa	286
6. Metro quadrado, seus múltiplos e submúltiplos	289
Transformação de unidades	292
7. Área da superfície limitada por um retângulo	295
Área de um quadrado	296

8. Medidas agrárias	299
Diversificando	
Tangram	303

CAPÍTULO 10 Mais medidas

1. Medidas de tempo	305
Unidades de medida de tempo	305
2. Medidas de espaço	307
Conhecendo alguns sólidos	307
Volume dos sólidos	310
Metro cúbico, seus múltiplos e submúltiplos	311
Transformação de unidades	314
3. Volume de um paralelepípedo retângulo	315
Volume de um cubo	316
4. Medidas de capacidade	319
Unidades de medida de capacidade	319
Transformação de unidades	321
5. Relações entre as unidades de volume e de capacidade	324
6. Medidas de massa	327
Unidades de medida de massa	327
Transformação de unidades	330
Unidades de medida de massa usadas no comércio atacadista	333
Diversificando	
Dobradura	339

Respostas	340
Sugestões de leitura para o aluno	351
Lista de siglas	351
Bibliografia	352

- 60 Das sentenças abaixo, descubra as que são falsas e corrija-as em seu caderno. **a e b**
- a) O número 260 é divisível por 2, por 3 e por 5. O número 260 é divisível por 2 e por 5.
- b) O número 2.040 é divisível por 2, mas não por 3. O número 2.040 é divisível por 2 e por 3.
- c) O número 3.065 é divisível por 5, mas não é divisível por 3.
- d) O número 18.756 é divisível por 4 e por 9. 61. a) Não, pois ele não é par. b) Sim, pois ele termina em 6.
- 61 Dividindo um número por 10, restou 5.
- a) Esse número é divisível por 2? Por quê?
- b) Esse número é divisível por 5? Por quê? Sim, pois ele termina em 5.
- 62 Escreva um número par que seja divisível por 5. Esse número também é divisível por 10? Por quê? Sim, porque, sendo par e divisível por 5, o número deve terminar em zero.
- 63 Ana possui de 100 a 150 DVDs. Agrupando-os de 12 em 12, de 15 em 15 ou de 20 em 20, sempre resta 1. Quantos DVDs Ana tem? 121 DVDs



62 Exemplos de resposta: multiplicando o número por 3 e, depois, por 4; por 2 e, depois, por 6.

- 64 Um número ímpar é maior que 30 e menor que 50. Ele também é múltiplo de 11. Que número é esse? 33
- 65 Sem efetuar a divisão, verifique se o número 34.524 é divisível por 6. Justifique sua resposta. O número 34.524 é divisível por 6, pois é divisível por 2 e por 3.
- 66 Dê exemplo de um número: Exemplo de resposta:
- a) que seja divisível por 5 e não seja divisível por 2; 15
- b) que seja divisível por 2 e não seja divisível por 5. 11
- 67 Como é possível, usando uma calculadora, efetuar a multiplicação de um número por 12, se a tecla 1 não funciona?
- 68 Que algarismo deve ser colocado à esquerda de 283 para que se obtenha um número divisível por 9? 1
- 69 Considere o número 518. Trocando a ordem dos seus algarismos, obtemos o número 815. Subtraindo 518 de 815, temos: $815 - 518 = 297$
Observe que 297 é múltiplo de 9. Agora, escreva outro número de três algarismos. Trocando a ordem dos algarismos, que número você obtém? Com os números que obteve, subtraia o menor do maior. Verifique se a diferença encontrada é divisível por 9. Resposta pessoal.

3 Números primos e números compostos

Existem números que têm somente dois divisores distintos (diferentes). O número 7 é um deles. Seus divisores são apenas o 1 e o 7.

Número primo é todo número natural que tem apenas dois divisores naturais distintos: o número 1 e o próprio número.

Por exemplo, os números 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... são números primos.

Existem também números naturais que têm mais de dois divisores distintos. O número 12 é um deles. Seus divisores são 1, 2, 3, 4, 6 e 12.

Todo número natural que tem mais de dois divisores distintos é chamado de **número composto**.

Por exemplo, os números 4, 9, 10, 15, 94 e 105 são números compostos.

OBSERVAÇÃO

- O número 1 não é primo nem composto, pois tem **um único** divisor natural, que é ele mesmo.

72. O número 2 não, pois qualquer outro número par, além de ser dividido por 2 e por ele mesmo, também é dividido por 2 e, assim, tem mais de dois divisores naturais distintos.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- 70 Classifique os números a seguir em primo ou composto.
- a) 14 *composto* c) 17 *primo* e) 296 *composto*
b) 11 *primo* d) 21 *composto* f) 37 *primo*

- 71 Observe a página do mês de março do calendário de determinado ano.

MARÇO						
DOM	SEG	TER	QUA	QUI	SEX	SÁB
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

- a) Há algum domingo representado por um número primo? Se houver, que número é esse? *sim; 11*
- b) Quantos fins de semana (sábado e domingo) existem nesse mês cujos dois dias são representados por números primos? *nenhum*
- c) Qual dia da semana desse mês é representado pela maior quantidade de números primos? *sábado*
- 72 Existe um número que é par e é primo ao mesmo tempo. Que número é esse? Existem outros números nessas condições? Justifique.
- 73 Existe algum múltiplo de 3 que seja primo? Qual? *sim; o 3*
- 74 Existe algum múltiplo de 3 diferente de 3 que seja primo? Justifique sua resposta.
Não, pois todo múltiplo de 3 diferente de 3 é divisível por 3.
- 75 A soma dos algarismos de um número é 27. Esse número é primo? Por quê?
Não, pois não tem mais de dois divisores.
- 76 Determine o menor divisor primo de:
- a) 64 *2* c) 85 *5*
b) 75 *3* d) 49 *7*
- 77 Qual é o menor número de dois algarismos que é primo? E qual é o maior? *11; 97*

79. a) Exemplo de resposta: afirmação provavelmente verdadeira

b) Exemplos de resposta: *sim; 4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3, 8 = 3 + 5, 10 = 3 + 7, 12 = 5 + 7, 14 = 3 + 11, 16 = 5 + 11, 18 = 7 + 11, 20 = 3 + 17, 22 = 3 + 19*

c) Exemplos de resposta: *200 = 133 + 67, 200 = 127 + 73, sim*

76. a) divisores de 7: 1, 7; divisores de 10: 1, 2, 5, 10; divisores de 35: 1, 5, 7, 35; divisores de 41: 1, 41; divisores de 73: 1, 3, 5, 15, 25, 75; divisores de 77: 1, 7, 11, 77

b) Veja a tabela no Suplemento com orientações para o professor.
c) Veja o gráfico no Suplemento com orientações para o professor.

- 78 Observe os números a seguir e faça o que se pede.

7 10 35 41 75 77

- a) Determine todos os divisores de cada número.
- b) No caderno, construa uma tabela com duas colunas e sete linhas e registre nela os números e a quantidade de divisores.
- c) No caderno, construa um gráfico de colunas correspondente a essa tabela.
- d) Qual desses números apresenta maior quantidade de divisores?
- e) Entre os números apresentados, existem números primos? Se existirem, quais? Justifique sua resposta.

Sim, o 7 e o 41, pois ambos não possuem mais divisores distintos.

- 79 Reúna-se com um colega, leiam o texto a seguir e façam, no caderno, o que se pede.



Em 1742, da troca de cartas entre os matemáticos Christian Goldbach e Leonard Euler, surgiu a conjectura de Goldbach: "Todo número par maior que dois é a soma de dois primos".

Vejam alguns exemplos:

$$138 = 37 + 101; 974 = 313 + 661$$

- a) Pesquisem em um dicionário e escrevam o significado da palavra conjectura.
- b) Essa conjectura vale para os dez primeiros números pares maiores do que 2?
- c) Mostrem que essa conjectura vale para 200. Agora respondam: Há mais de uma resposta possível?
- d) Cada um escolhe um número par de três algarismos para o outro verificar essa conjectura. *Resposta pessoal.*

Pense mais um pouco...

Há seis anos,
a idade de Pedro era
um número ímpar e um
quadrado perfeito.

Hoje, minha
idade é um número
primo e há dois anos
também era.



Maria



Pedro

Sabendo que Pedro tem menos de 50 anos, descubra a sua idade hoje. 31 anos.

Decomposição em fatores primos

Todo número natural composto pode ser decomposto em um produto de dois ou mais fatores diferentes de 1.

Veja, por exemplo, 36 decomposto em um produto de dois fatores diferentes de 1.

$$\begin{array}{c} 36 \\ \hline 2 \cdot 18 \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{c} 36 \\ \hline 4 \cdot 9 \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{c} 36 \\ \hline 6 \cdot 6 \end{array}$$

Vamos prosseguir, decompondo os fatores que são números compostos também em um produto de dois fatores, até que fiquem somente fatores primos.

$$\begin{array}{c} 36 \\ \hline 2 \cdot 18 \\ \hline 2 \cdot 2 \cdot 9 \\ \hline 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \\ \hline 2^2 \cdot 3^2 \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{c} 36 \\ \hline 4 \cdot 9 \\ \hline 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \\ \hline 2^2 \cdot 3^2 \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{c} 36 \\ \hline 6 \cdot 6 \\ \hline 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \\ \hline 2^2 \cdot 3^2 \end{array}$$

Quando um número está decomposto em um produto em que todos os fatores são números primos, dizemos que esse número está **decomposto em fatores primos**.

Dessa forma, o produto $2^2 \cdot 3^2$ é a decomposição em fatores primos do número 36. Observe que pode haver diferentes formas de decompor um número natural em um produto de dois ou mais fatores, mas a decomposição em fatores primos é **única**.

Além do modo apresentado anteriormente, a decomposição de um número natural em fatores primos pode ser feita da seguinte maneira:

- divide-se o número dado pelo seu menor divisor primo;
- divide-se o resultado obtido pelo seu menor divisor primo;
- repete-se o procedimento anterior até encontrar o quociente 1.

Veja como decompor o número 60 em fatores primos usando esse procedimento.

60	2	← O menor divisor primo de 60 é 2; divide-se 60 por 2.
30	2	← O menor divisor primo de 30 é 2; divide-se 30 por 2.
15	3	← O menor divisor primo de 15 é 3; divide-se 15 por 3.
5	5	← O menor divisor primo de 5 é 5; divide-se 5 por 5.
1		← Encontramos o quociente 1.



Podemos escrever: $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ ou $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

Também podemos efetuar a decomposição do número 60 dos seguintes modos:

60	3
20	2
10	5
2	2
1	

60	5
12	2
6	2
3	3
1	

60	2
30	3
10	2
5	5
1	

Veja que o resultado é o mesmo: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

Agora, observe a decomposição em fatores primos dos números 180, 98 e 540.

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

98	2
49	7
7	7
1	

540	2
270	2
135	3
45	3
15	3
5	5
1	

$$180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$98 = 2 \cdot 7 \cdot 7$$

$$98 = 2 \cdot 7^2$$

$$540 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

80 Decomponha os números a seguir em fatores primos.

- 120 $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$
- 144 $144 = 2^4 \cdot 3^2$
- 168 $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$
- 225 $225 = 3^2 \cdot 5^2$
- 117 $117 = 3^2 \cdot 13$
- 125 $125 = 5^3$

81 Um número natural decomposto em fatores primos é representado assim:

$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$$

Que número é esse? **504**

82 $A = 2 \cdot 3 \cdot 11$ e $B = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ são as decomposições de dois números naturais. Calcule $A + B$. **246**

4 O máximo divisor comum

Paulo trabalha em uma editora e recebeu a encomenda de livros ao lado. Para embalar os livros para entrega, ele deveria pôr o maior número possível de livros em cada pacote e todos os pacotes tinham de ter a mesma quantidade de livros.

Para saber a quantidade de livros que colocaria em cada pacote, Paulo determinou os divisores naturais de cada número da tabela:

- divisores de 96: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96;
- divisores de 108: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 108;
- divisores de 132: 1, 2, 3, 4, 6, 11, 12, 22, 33, 44, 66, 132.

Note que os números 1, 2, 3, 4, 6 e 12 são divisores de 96, de 108 e de 132, ou seja, eles são **divisores comuns** desses números.

Assim, para que tivessem a mesma quantidade de livros, os pacotes poderiam ser feitos com 1, 2, 3, 4, 6 ou 12 livros. Mas, como cada pacote deveria ter o maior número possível de livros, Paulo colocou 12 livros em cada um, ou seja, ele encontrou o maior divisor comum de 96, 108 e 132.

Encomenda de livros	
Livraria	Número de livros
A	96
B	108
C	132

Dados obtidos pela editora.



O maior divisor comum de dois ou mais números é chamado de **máximo divisor comum** e representado pelas iniciais **mdc**.

Na situação descrita, o máximo divisor comum de 96, 108 e 132 é 12, que indicamos: $\text{mdc}(96, 108, 132) = 12$

Pergunta aos alunos: "Quantos pacotes de livros cada livraria recebeu?"
(Resposta: A: 8 pacotes; B: 9 pacotes; C: 11 pacotes.)

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- 83 Um marceneiro tem duas tiras de madeira, uma com 120 centímetros de comprimento e outra com 180 centímetros e quer cortá-las em pedaços iguais para montar uma estante. Sabendo que os pedaços devem ser do maior tamanho possível, qual será o comprimento de cada pedaço?

60 centímetros

- 84 Determine:

- a) os divisores de 60; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60
b) os divisores de 72; 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 24, 36, 72
c) os divisores comuns de 60 e 72; 1, 2, 3, 4, 6, 12
d) o maior desses divisores comuns, 12

- 85 Determine:

- a) $\text{mdc}(8, 10)$ 2 c) $\text{mdc}(9, 12, 15)$ 3
b) $\text{mdc}(40, 50)$ 10 d) $\text{mdc}(16, 56, 80)$ 8

- 86 Em uma classe, há 28 meninos e 21 meninas. A professora quer formar grupos só de meninas ou só de meninos, com a mesma quantidade de alunos e usando a maior quantidade possível.

- a) Quantos alunos terá cada grupo? 7
b) Quantos grupos de meninas podem ser formados? E de meninos? 3; 4

Encontrando o mdc pela decomposição em fatores primos

Vimos como calcular o mdc de dois ou mais números naturais conhecendo seus divisores. Agora, vamos ver como aplicar o processo da decomposição em fatores primos para o cálculo do mdc de dois ou mais números.

Como exemplo, vamos calcular o mdc dos números 280 e 300.

Inicialmente, decomponhamos cada número em fatores primos.

$$\begin{array}{r|l} 280 & 2 \\ 140 & 2 \\ 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$280 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$\begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$300 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$$

$$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$$



Em seguida, é preciso considerar os fatores comuns que apresentam o menor expoente para garantir que esses fatores sejam divisores dos dois números.

$$280 = 2^3 \cdot \underline{5} \cdot 7$$

$$300 = \underline{2^2} \cdot 3 \cdot 5^2$$

Os fatores primos **comuns** de menor expoente são 2^2 e 5.

Multiplicando esses fatores, obtemos o mdc dos números. Então:

$$\text{mdc}(280, 300) = 2^2 \cdot 5 = 4 \cdot 5 = 20$$

Ainda como exemplo, vamos calcular o mdc dos números 120, 150 e 252.

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$150 = \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot 5^2$$

$$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

$$\text{mdc}(120, 150, 252) = 2 \cdot 3 = 6$$

OBSERVAÇÃO

- Dois ou mais números que têm o máximo divisor comum igual a 1 são chamados de **números primos entre si**.

Por exemplo, 8 e 15 são primos entre si, pois o $\text{mdc}(8, 15) = 1$. Observe:

- divisores de 8: $\underline{1}$, 2, 4, 8

- divisores de 15: $\underline{1}$, 3, 5, 15

Note que o único divisor comum desses dois números é o 1.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- 87 Dois números decompostos em fatores primos são escritos da seguinte maneira:

$$2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11 \quad \text{e} \quad 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$$

Qual é o máximo divisor comum desses números? **225**

- 88 Considerando $a = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, $b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ e $c = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$, calcule:

a) $\text{mdc}(a, b)$ **12** b) $\text{mdc}(a, c)$ **24** c) $\text{mdc}(b, c)$ **252** d) $\text{mdc}(a, b, c)$ **12**

- 89 Aplicando a decomposição em fatores primos, determine o mdc dos números:

a) 32 e 48 **16** c) 75 e 125 **25** e) 198, 126 e 54 **18**
b) 60 e 72 **12** d) 70, 90 e 120 **10** f) 28, 70 e 84 **14**

- 90 Em uma loja de tecidos, a balconista Carla conversa com o gerente.



Carla fez alguns cálculos e conseguiu descobrir qual deveria ser o comprimento de cada retalho. Determine esse comprimento. **78 centímetros**

- 91 Verifique se, em cada caso, os números são primos entre si. Justifique sua resposta.

a) 25 e 30 c) 7 e 11
b) 40 e 21 d) 28 e 35

- 92 Na Escola Começo, os alunos do 6º ano organizaram uma competição em que participaram: do 6º ano A, 48 alunos; do 6º ano B, 36 alunos; e do 6º ano C, 30 alunos. Cada turma formou suas equipes. Todas as equipes tinham o mesmo número de alunos e o maior número possível deles.

a) Quantos alunos havia em cada equipe? **12**
b) Qual é o número total de equipes? **10**

- 93 Alexandre é o irmão mais velho de Regina e Guilherme. Regina tem 12 anos, e Guilherme, 10. As idades dos três irmãos são números primos entre si. Determine a idade de Alexandre sabendo que é um número múltiplo de 7 e menor que 25. **21 anos**



91. a) Não são, pois o menor o 5 também é divisor comum de 25 e 30.
b) Não são, pois: $\text{mdc}(40, 21) = 1$

c) Não são, pois o único divisor comum entre eles é o 1.
d) Não são, pois: $\text{mdc}(28, 35) = 7$ que é diferente de 1.

5 O mínimo múltiplo comum

Considere a situação a seguir.

Um feirante sempre leva para a feira a mesma quantidade de ovos de galinha para vender. Ele sabe que, colocando os ovos em embalagens para 12 ovos ou para 18 ovos, não sobra nem falta ovo. Vamos calcular qual é o menor número de ovos que satisfaz essas condições.

Inicialmente, determinamos os múltiplos de cada um desses números:

- múltiplos de 12: 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, ...
- múltiplos de 18: 0, 18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, ...

Os números que são múltiplos de 12 e também de 18 são chamados de **múltiplos comuns** de 12 e 18. São eles: 0, 36, 72, ...

Dos múltiplos comuns diferentes de zero, o menor número é o 36. Assim, o menor número de ovos é 36.



O menor múltiplo comum diferente de zero de dois ou mais números é chamado de **mínimo múltiplo comum** e representado pelas iniciais **mmc**.

Na situação apresentada, vimos que o mínimo múltiplo comum de 12 e 18 é 36, que se indica por $\text{mmc}(12, 18) = 36$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

94 Determine:

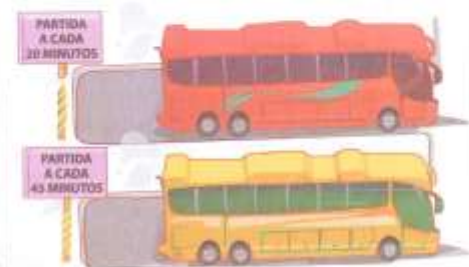
- os múltiplos de 6; 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, ...
- os múltiplos de 9; 0, 9, 18, 27, 36, 45, ...
- os múltiplos comuns de 6 e 9; 0, 18, 36, ...
- o menor desses múltiplos comuns diferente de zero. 18

95 Determine:

- $\text{mmc}(8, 10)$ 40
- $\text{mmc}(40, 50)$ 200
- $\text{mmc}(2, 6, 9)$ 18
- $\text{mmc}(4, 8, 12)$ 24

96 Em certo país, as eleições para presidente ocorrem a cada 4 anos e, para senador, a cada 8 anos. Em 2014, essas eleições coincidiram. Determine os anos das quatro próximas vezes em que elas voltarão a coincidir. 2022, 2030, 2038, 2046

97 De uma rodoviária, parte um ônibus da empresa X a cada 20 minutos e um ônibus da empresa Y a cada 45 minutos. Supondo que esses dois ônibus partam juntos às 8 horas da manhã, depois de quantos minutos os ônibus das duas empresas partirão juntos novamente? A que horas os ônibus partirão juntos novamente? depois de 180 minutos, às 11 horas



Encontrando o mmc pela decomposição em fatores primos

Vimos como calcular o mmc de dois ou mais números naturais conhecendo os múltiplos de cada um desses números. Existem, porém, outros processos que permitem calcular o mmc de dois ou mais números naturais. Vamos ver dois desses processos.

Decomposição individual

Como exemplo, vamos determinar o mmc de 280 e 300.

Inicialmente, decomponemos cada número em fatores primos.

$$\begin{array}{r|l} 280 & 2 \\ 140 & 2 \\ 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$\begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

Multiplicamos os fatores primos comuns e não comuns. Mas atenção: entre os fatores com bases iguais, escolhemos aquele que apresentar o maior expoente, uma vez que procuramos o múltiplo de 280 e de 300, ou seja, estamos procurando um número que seja divisível por 280 e 300 ao mesmo tempo.

$$280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$$

e

$$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

$$\text{Então: } \text{mmc}(280, 300) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 8 \cdot 3 \cdot 25 \cdot 7 = 4.200$$

Decomposição simultânea

Vamos determinar o mmc de 280 e 300 pela decomposição simultânea.

Inicialmente, decomponemos simultaneamente os números em fatores primos.

$$\begin{array}{r|l} 280, 300 & 2 \\ 140, 150 & 2 \\ 70, 75 & 2 \leftarrow 75 \text{ não é divisível por } 2: \text{ deve ser repetido.} \\ 35, 75 & 3 \leftarrow 35 \text{ não é divisível por } 3: \text{ deve ser repetido.} \\ 35, 25 & 5 \\ 7, 5 & 5 \leftarrow 7 \text{ não é divisível por } 5: \text{ deve ser repetido,} \\ 7, 1 & 7 \leftarrow 1 \text{ não é divisível por } 7: \text{ deve ser repetido,} \\ 1, 1 & \leftarrow \text{linha de } 1: \text{ fim da decomposição.} \end{array}$$

Em seguida, basta efetuar a multiplicação de todos os fatores obtidos.

$$\text{Então: } \text{mmc}(280, 300) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 4.200$$

Veja agora como obter o mmc de 120, 252 e 300.

120, 252, 300	2	
60, 126, 150	2	
30, 63, 75	2	← 63 e 75 não são divisíveis por 2: devem ser repetidos.
15, 63, 75	3	
5, 21, 25	3	← 5 e 25 não são divisíveis por 3: devem ser repetidos.
5, 7, 25	5	← 7 não é divisível por 5: deve ser repetido.
1, 7, 5	5	← 1 e 7 não são divisíveis por 5: devem ser repetidos.
1, 7, 1	7	← 1 não é divisível por 7: deve ser repetido.
1, 1, 1		← linha de 1: fim da decomposição.

$$\text{mmc}(120, 252, 300) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 12.600$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- 98** Dois números decompostos em fatores primos são expressos da seguinte maneira:

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \text{ e } 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$$

Indique o produto de fatores primos que representa o mínimo múltiplo comum desses números. $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

- 99** Considerando $a = 2^3 \cdot 3^2$, $b = 2^2 \cdot 5$ e $c = 2 \cdot 3^3$, calcule:

- a) $\text{mmc}(a, b)$ **300**
 b) $\text{mmc}(a, c)$ **216**
 c) $\text{mmc}(b, c)$ **540**
 d) $\text{mmc}(a, b, c)$ **1.080**

- 100** Calcule, pelo processo da decomposição em fatores primos, o mínimo múltiplo comum dos números:

- a) 25 e 30 **150**
 b) 22 e 99 **198**
 c) 36 e 48 **144**
 d) 150, 60 e 75 **300**

- 101** Usando o processo da decomposição simultânea em fatores primos, determine o mínimo múltiplo comum dos números:

- a) 40 e 60 **120**
 b) 45 e 120 **360**
 c) 72, 45 e 54 **1.080**
 d) 15, 20 e 25 **300**

- 102** Rosa mora sozinha em uma cidade a 200 quilômetros de distância de seus filhos Roberto, Mário e Rosana. Roberto vai visitá-la a cada 12 dias, Mário, a cada 20 dias, e Rosana, a cada 18 dias. Supondo que eles se encontraram hoje na casa dela, daqui a quantos dias se encontrarão de novo na casa de Rosa? **180 dias**

- 103** Sônia trouxe para as irmãs Flávia e Fabiana laranjas de sua chácara. Flávia contou as laranjas de 6 em 6 e não sobrou nenhuma, e Fabiana as contou de 8 em 8 e também não sobrou nenhuma. Quantas laranjas Sônia trouxe, sabendo que o número delas era maior que 90 e menor que 100? **96**



- 104** Juliana percorre os 400 metros de uma pista de atletismo em 4 minutos, e Marina percorre a mesma distância em 5 minutos. Em determinado momento, as duas estarão juntas. Depois de quantos minutos elas voltarão a se encontrar? **20 minutos**

- 105 Um painel de propaganda é composto de 4 cores de lâmpadas: azul, vermelha, verde e amarela. Ao serem ligadas as lâmpadas, elas piscam em intervalos diferentes de tempo:

- as azuis a cada 3 segundos;
- as vermelhas a cada 4 segundos;
- as verdes a cada 5 segundos;
- as amarelas a cada 6 segundos.

Num dado instante, elas piscam ao mesmo tempo.

- Depois de quanto tempo as lâmpadas azuis e vermelhas voltarão a piscar juntas novamente? *12 segundos*
- Depois de quanto tempo as lâmpadas verdes, vermelhas e amarelas voltarão a piscar juntas novamente? *60 segundos*
- Depois de quanto tempo as quatro lâmpadas voltarão a piscar juntas novamente? *60 segundos*

- 106 Em um sítio há uma rua de laranjeiras e, ao seu lado, uma rua de limoeiros. Os pés de laranja são plantados a cada 4 metros, e os de limão, a cada 6 metros. No início das ruas foi plantado um pé de laranja na frente de um pé de limão. De quantos em quantos metros isso acontece? *12 metros*

- 107 De uma rodoviária partem ônibus para João Pessoa (PB) a cada 3 horas, para Natal (RN) a cada 6 horas e para Recife (PE) a cada 8 horas. Em determinado dia, às 7 horas da manhã, partiram, ao mesmo tempo, ônibus para essas três cidades. Após quantas horas essa coincidência voltou a ocorrer? *24 horas*



Farol do Cabo Branco,
João Pessoa (PB).



Rio Capibaribe,
Recife (PE).

Parque Turístico Ecológico
Dunas de Genipabu, distante
25 km de Natal (RN).



- 108 Uma florista tem 100 rosas brancas e 60 rosas vermelhas e pretende montar o maior número de ramalhetes de modo que cada ramalhete contenha o mesmo número de rosas brancas e o mesmo número de rosas vermelhas.

- Qual é o maior número de ramalhetes que a florista poderá montar? *20*
- Quantas rosas brancas e quantas rosas vermelhas terá cada um desses ramalhetes? *5 rosas brancas e 3 rosas vermelhas*

